

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

اَللّٰهُمَّ صَلِّ عَلٰى مُحَمَّدٍ وَّآلِ مُحَمَّدٍ وَّعَجِّلْ فَرَجَهُمْ

ریاضی (۱)

رشته‌های ریاضی و فیزیک – علوم تجربی

پایه دهم

دوره دوم متوسطه



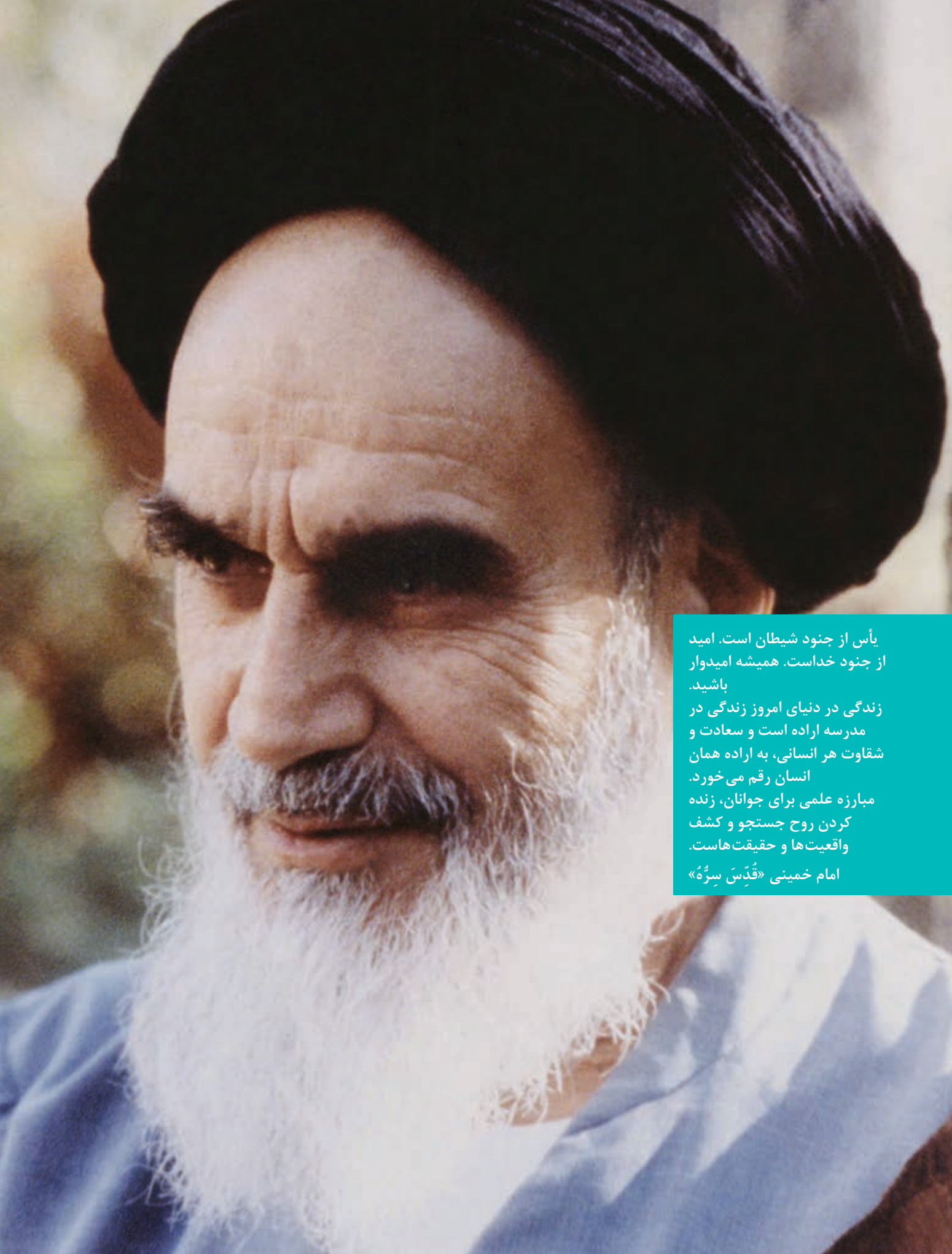


وزارت آموزش و پرورش سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب: ریاضی (۱) - پایه دهم دوره دوم متوسطه - ۱۱۰۲۱۱
پدیدآورنده: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف: دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری
شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف: حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، مهدی ایزدی، طیبہ حمزہ بیگی، خسرو داودی، محمدهاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیدصالحی، احمد شاهورانی، میرشهرام صدر، شادی صفی‌نیا، اکرم قابل‌رحمت و محمد مقاصدی (اعضای شورای برنامه‌ریزی)
مدیریت آماده‌سازی هنری: حمیدرضا امیری، محمدحسن بیژن‌زاده، احسان بهرامی‌سامانی، رضا حیدری قزلجه، محمود داورزنی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیدصالحی و مجتبی قربانی آرائی (اعضای گروه تألیف) - سیداکبر میرجعفری (ویراستار)
شناسه افزوده آماده‌سازی: اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
نشانی سازمان: احمدرضا امینی (مدیر امور فنی و چاپ) - مجید ذاکری یونسی (مدیر هنری) - سهیل صالح (طراح گرافیک) - طاهره حسن‌زاده (طراح جلد) - راحله زادفتح‌اله و خدیجه محمدی (صفحه‌آرا) - پریسا لعل‌خوشاب، مریم دهقان‌زاده، زهرا ایمانی‌نصر، علی نجمی، سیف‌الله بیک‌محمددلیوند، سپیده ملک‌ایزدی و حمید ثابت کلاچاهی (امور آماده‌سازی)
ناشر: تهران: خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)
چاپخانه: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»
سال انتشار و نوبت چاپ: ۱۴۰۳

تلفن: ۸۸۸۳۱۱۶۱-۹، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹
وبگاه: www.irtextbook.ir و www.chap.sch.ir
شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران تهران: ۱۷ جاده مخصوص کرج - خیابان ۶۱ (داروپخش) تلفن: ۴۴۹۸۵۱۶۱-۵، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۳۷۵۱۵-۱۳۹
چاپ نهم ۱۴۰۳

شابک ۹۷۸-۹۶۴-۰۵-۲۵۱۲-۸
ISBN: 978-964-05-2512-8



یأس از جنود شیطان است. امید
از جنود خداست. همیشه امیدوار
باشید.
زندگی در دنیای امروز زندگی در
مدرسه اراده است و سعادت و
شقاوت هر انسانی، به اراده همان
انسان رقم می خورد.
مبارزه علمی برای جوانان، زنده
کردن روح جستجو و کشف
واقعیت ها و حقیقت هاست.
امام خمینی «قُدَسَ سِرُّهُ»

کلیه حقوق مادی و معنوی این کتاب متعلق به سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش است و هرگونه استفاده از کتاب و اجزای آن به صورت چاپی و الکترونیکی و ارائه در پایگاه‌های مجازی، نمایش، اقتباس، تلخیص، تبدیل، ترجمه، عکس برداری، نقاشی، تهیه فیلم و تکثیر به هر شکل و نوع، بدون کسب مجوز از این سازمان ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.

فهرست

فصل ۱: مجموعه، الگو و دنباله	۱
درس اول: مجموعه‌های منتهی و نامتناهی	۲
درس دوم: متمم یک مجموعه	۸
درس سوم: الگو و دنباله	۱۴
درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی	۲۱
فصل ۲: مثلثات	۲۸
درس اول: نسبت‌های مثلثاتی	۲۹
درس دوم: دایره مثلثاتی	۳۶
درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی	۴۲
فصل ۳: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری	۴۷
درس اول: ریشه و توان	۴۸
درس دوم: ریشه n ام	۵۴
درس سوم: توان‌های گویا	۵۹
درس چهارم: عبارت‌های جبری	۶۲
فصل ۴: معادله‌ها و نامعادله‌ها	۶۹
درس اول: معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن	۷۰
درس دوم: سهمی	۷۸
درس سوم: تعیین علامت	۸۳
فصل ۵: تابع	۹۴
درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن	۹۵
درس دوم: دامنه و برد توابع	۱۰۱
درس سوم: انواع تابع	۱۰۹
فصل ۶: شمارش، بدون شمردن	۱۱۸
درس اول: شمارش	۱۱۹
درس دوم: جایگشت	۱۲۷
درس سوم: ترکیب	۱۳۳
فصل ۷: آمار و احتمال	۱۴۱
درس اول: احتمال یا اندازه‌گیری شانس	۱۴۲
درس دوم: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه	۱۵۲
درس سوم: متغیر و انواع آن	۱۵۹

سخنی با معلمان گرامی

باسمه تعالی

کتاب حاضر همسو با برنامه درسی ملی و در ادامه تغییر کتاب‌های ریاضی پایه‌های هشتم و نهم تألیف شده است. در گذشته تأکید کتاب‌های درسی ریاضی بیشتر بر توانایی انجام محاسبات بوده است. در کتاب‌های جدید ضمن حفظ این هدف، تأکید اصلی بر پرورش قوه تفکر و تعقل و رشد توانایی حل مسئله است. اگرچه رسیدن به چنین هدفی با موانع و دشواری‌های فراوانی روبه‌روست و تحقق کامل آن به سرعت امکان‌پذیر نیست؛ ولی مدّ نظر قرار دادن چنین هدفی می‌تواند جهت اصلی حرکت جامعه آموزش ریاضی را تعیین کند. اصلی‌ترین و مؤثرترین نقش در این برنامه به عهده دبیران ریاضی است. توانایی انعطاف و هماهنگی و همراهی معلمان با برنامه‌های جدید ستودنی است. مؤلفان کتاب حاضر سعی کرده‌اند که در جهت ادای وظیفه نسبت به معلمان عزیز ریاضی، ضمن اطلاع‌رسانی به موقع درباره تألیف، کتاب راهنمای معلم و نیز فیلم‌های آموزشی را در اختیار همکاران عزیز قرار دهند.

ساختار کتاب از سه بخش فعالیت، کار در کلاس و تمرین تشکیل شده است. آنچه که در انجام یک فعالیت به طور عمده مدّ نظر بوده است، آشنایی دانش‌آموزان با مفهوم درسی و سهیم بودن در ساختن دانش موردنظر است. فعالیت‌ها شامل مراحل محلی مانند درک کردن، کشف کردن، حل مسئله، استدلال کردن، بررسی کردن، حدس و آزمایش، توضیح یک راه حل، مرتب کردن، قضاوت درباره یک راه حل و مقایسه راه حل‌های مختلف است. هدایت فعالیت‌ها توسط معلم انجام می‌پذیرد و هر جا که لازم باشد، راهنمایی دانش‌آموزان توسط او ارائه خواهد شد. در بسیاری موارد انجام فعالیت ساده و آسان نیست و صد البته اجرای مناسب آن دارای ارزش زیادی خواهد بود.

هنگام انجام فعالیت، هدایت گفت‌وگوها در کلاس یا گفتمان ریاضی که در آن دانش‌آموزان به ارائه دیدگاه‌ها و دفاع از ایده‌های خود و نیز قضاوت و ارزیابی افکار و روش‌های ریاضی دیگر دانش‌آموزان می‌پردازند، به عهده معلم است. به طور خلاصه فراهم کردن فرصت‌های یادگیری و مجال دادن به دانش‌آموزان برای اینکه خود به کشف مفهوم بپردازند، می‌تواند یکی از دغدغه‌های همکاران عزیزمان باشد. کار در کلاس با هدف تثبیت و تعمیق و در مواردی تعمیم یادگیری طراحی شده است و انتظار این است که دانش‌آموزان بیشترین سهم را در حل آن داشته باشند. حل تمرین به عهده دانش‌آموزان است؛ اما ارائه و بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان در کلاس ضروری است.

با آنکه بخش جداگانه‌ای با عنوان حل مسئله در کتاب وجود ندارد؛ ولی در اکثر فعالیت‌ها دانش‌آموزان به نوعی درگیر فرایند حل مسئله می‌شوند. علاوه بر این، اساساً آموزش راهبردها معمولاً به زمانی طولانی نیاز دارد؛ زیرا هر راهبرد خود ممکن است شامل ده‌ها راهبرد جزئی‌تر باشد. در کتاب حاضر سعی شده است بین مفاهیم و رویه‌های ریاضی ارتباط و اتصال برقرار شود. توصیه مؤلفان به همکاران ارجمند، تأکید بر اهداف کتاب درسی است و باید از ارائه مسائلی که تنها بر محاسبات پیچیده و الگوریتم‌ها متکی هستند پرهیز شود.

پس از آماده شدن نسخه اولیه کتاب، مؤلفان جلسات فشرده‌ای را برای نقد و اصلاح کتاب برگزار کردند و برخی تغییرات و اصلاحات را در کتاب اعمال نمودند. نسخه‌های اولیه کتاب ماه‌ها قبل از چاپ کتاب روی وبگاه واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی قرار گرفته بود. علاوه بر این نظرات اعتبار بخشی و نیز نظرات دبیران سراسر کشور نیز مد نظر قرار گرفت. لازم است از تمام همکارانی که نسخه اولیه کتاب را مطالعه کردند و نظرات و بررسی‌ها و پیشنهاد‌های خود را به دفتر تألیف ارسال کردند، تقدیر و تشکر کنیم. ده‌ها نقد رسیده از سراسر کشور نوید بخش حضور و مشارکت مؤثر دبیران ریاضی در تألیف کتاب‌های درسی است. در کنار این، مشاورینی از مراکز آموزشی و پژوهشی و دانشگاه‌ها نیز بخش‌هایی از کتاب را مطالعه و نقد کردند که جا دارد از آنها نیز قدردانی شود. گروه تألیف آمادگی دریافت نظرات و دیدگاه‌های تمامی همکاران و عزیزان را از طریق رمزینه سریع پاسخ نظرسنجی کتاب درسی دارد. به علاوه بسیاری از مطالب مربوط به پشتیبانی کتاب از طریق وبگاه واحد ریاضی قابل دریافت است. اطمینان داریم که با اتکال به خدای متعال و تکیه بر تلاش، اراده و همت شما دبیران محترم می‌توانیم به برآورده شدن اهداف کتاب امیدوار باشیم.

مؤلفان



نظرسنجی کتاب درسی

مجموعه، الگو و دنباله

فصل



آلا داغلار یا کوه‌های رنگی در شهرستان ماه‌نشان استان زنجان



درس اول مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

درس دوم متمم یک مجموعه

درس سوم الگو و دنباله

درس چهارم دنباله‌های حسابی و هندسی

درس اول: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌های اعداد

انسان در طول تاریخ برحسب نیاز خود از مجموعه‌های مختلف اعداد استفاده کرده است. برخی از این مجموعه‌ها که در سال‌های قبل با آنها آشنا شدیم، به شرح زیرند:

مجموعه اعداد طبیعی: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

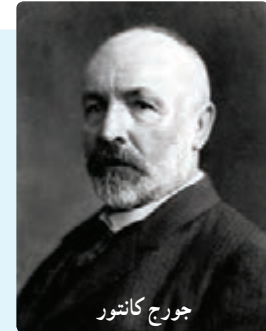
مجموعه اعداد حسابی: $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

مجموعه اعداد صحیح: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

مجموعه اعداد گویا: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$

مجموعه اعدادی که بتوان آنها را به صورت $\mathbb{Q}' = \mathbb{Q}$: مجموعه اعداد گنگ نسبت دو عدد صحیح نمایش داد.

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$: مجموعه اعداد حقیقی



جورج کانتور

«مجموعه» یکی از اساسی‌ترین مفاهیم ریاضی است که بسیاری از نظریه‌های دیگر ریاضی در یک قرن اخیر بر مبنای آن پایه‌گذاری یا سازماندهی شده‌اند. مطالعات جدی دربارهٔ مجموعه‌ها با کار جورج کانتور در سال ۱۸۷۰م آغاز شده است.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود رابطهٔ زیرمجموعه بودن بین این مجموعه‌ها به شکل $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ برقرار است. به عبارت دیگر تمام مجموعه‌های اعدادی که تاکنون با آنها آشنا شده‌ایم، زیرمجموعه‌هایی از اعداد حقیقی‌اند. در نتیجه، هر عدد دلخواهی را که در نظر بگیریم، باید جایی روی محور اعداد حقیقی داشته باشد و همچنین هر نقطه روی این محور نشان‌دهندهٔ یک عدد حقیقی مشخص است.

کاردرکلاس

۱ الف) مجموعه $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ چه نام دارد؟ آن را روی شکل مقابل هاشور بزنید و دو عضو دلخواه از آن را در ناحیهٔ هاشورخورده بنویسید.

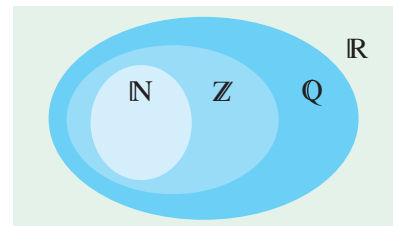
ب) دو عدد گویا مثال بزنید که عدد صحیح نباشند و آنها را روی شکل مقابل در محل مناسب بنویسید.

پ) اعداد زیر را روی شکل و در محل مناسب بنویسید.

$$\sqrt{17}, 0, 200, \frac{\pi}{4}, 2/6, 2\sqrt{5}, -\frac{25}{3}, -9$$

ت) مجموعه اعداد صحیح غیر حسابی را با نمایش اعضا بنویسید. $\mathbb{Z} - \mathbb{W} = \{ \quad \}$

ث) مجموعهٔ $\mathbb{W} - \mathbb{N}$ چند عضو دارد؟



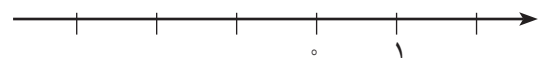
هریک از اعداد داده شده را در یکی از جاهای مشخص شده روی محور بنویسید. کدام یک از این شش عدد گنگ‌اند؟ زیر آنها خط بکشید.

$$2/45, \frac{-7}{2}, 6, -4/9, \pi, -\sqrt{2}$$



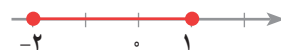
بازه‌ها

در اینجا گونه دیگری از زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید A مجموعه شامل تمام اعداد حقیقی بین -2 و 1 به همراه خود این دو عدد باشد؛ یعنی $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\}$. اعضای A را روی محور زیر، با رنگ کردن مشخص کنید. آیا می‌توان تمام اعضای A را فهرست کرد؟ آیا می‌توان اولین عدد حقیقی بعد از -2 را مشخص کرد؟



چنین زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ که مشخص‌کننده یک قطعه از محور اعداد حقیقی باشد را «بازه» یا «فاصله» می‌نامیم. بازه‌ها در ریاضیات از اهمیت نسبتاً زیادی برخوردارند و ما هم در برخی از فصل‌های بعدی این کتاب به دفعات با آنها سر و کار خواهیم داشت. از این رو شایسته است که برای نشان دادن آنها از نماد ساده‌تری استفاده شود. بازه‌هایی مثل A که شامل هر دو نقطه انتهایی خود می‌باشد را **بازه بسته** از -2 تا 1 می‌نامیم و آن را با نماد $[-2, 1]$ نشان می‌دهیم. حال اگر نقاط ابتدایی و انتهایی این بازه یعنی -2 و 1 را از A حذف کنیم، آنگاه مجموعه‌ای مانند $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\}$ به دست می‌آید که آن را **بازه باز** بین -2 و 1 می‌نامیم و با نماد $(-2, 1)$ نشان می‌دهیم. طول بازه (a, b) برابر است با $b - a$ (به عنوان مثال طول هر کدام از بازه‌های $(2, 7)$ ، $[2, 7]$ ، $(2, 7]$ و $[2, 7)$ برابر ۵ است.). به طور خلاصه:

$A = [-2, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\}$: بازه بسته بین -2 و 1



$B = (-2, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\}$: بازه باز بین -2 و 1



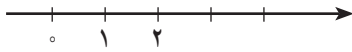
همچنین بازه‌هایی مثل $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 7\} = [2, 7)$ که تنها شامل یکی از نقاط انتهایی خود می‌باشد را بازه‌های **نیم باز** می‌نامیم.

فعالیت

اگر a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند، به طوری که $a < b$ آنگاه جدول زیر را کامل کنید:

نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$		باز
			بسته
		$[a, b]$	نیم باز
		$(a, b]$	نیم باز
	$\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 5\}$		

گاهی تمام اعداد حقیقی مثلاً بزرگ‌تر از ۲ مورد نظر است. به عنوان مثال، می‌دانیم که مجموعه جواب نامعادله $2x > 4$ به صورت $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$ است. اعضای C را روی محور زیر نشان دهید.



آیا می‌توانید C را به صورت یک بازه بنویسید؟ برای اینکه این مجموعه را به شکل بازه بنویسیم، از نماد $+\infty$ (بخوانید: مثبت بی‌نهایت) استفاده می‌کنیم. مجموعه C را در قالب بازه با نماد $(2, +\infty)$ نمایش می‌دهیم که یک بازه باز محسوب می‌شود. به همین ترتیب برای مجموعه‌ای مثل $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$ نمایش بازه‌ای به صورت $(-\infty, 1]$ خواهد بود که یک بازه نیم باز است. توجه داریم که $+\infty$ و $-\infty$ اعداد حقیقی نیستند. در سال‌های آینده با این دو نماد بیشتر آشنا خواهیم شد.

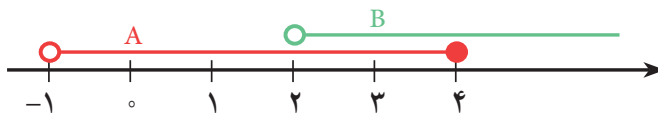
فعالیت

اگر a عدد حقیقی دلخواهی باشد، جدول زیر را کامل کنید.

نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$		
		$[a, +\infty)$	نیم باز
		$(-\infty, a)$	
	$\mathbb{R}$		
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$		

مثال

می‌خواهیم اجتماع و اشتراک دو بازه $A = (-1, 4]$ و $B = (2, +\infty)$ را به دست آوریم. نمایش هندسی هر دو بازه را مطابق شکل روی یک محور رسم می‌کنیم.



از روی شکل دیده می‌شود که $A \cup B$ برابر است با مجموعه تمام اعداد حقیقی بزرگ‌تر از -1 ؛ یعنی:

$$(-1, 4] \cup (2, +\infty) = (-1, +\infty)$$

همچنین با توجه به شکل ملاحظه می‌شود که $A \cap B$ برابر است با مجموعه تمام اعداد حقیقی بین ۲ و ۴ به همراه خود عدد ۴؛ یعنی:

$$(-1, 4] \cap (2, +\infty) = (2, 4]$$

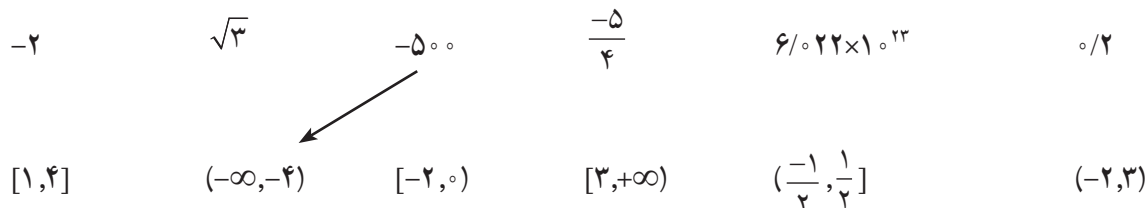
توضیح دهید که چرا $2 \notin A \cap B$.

۱ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید :

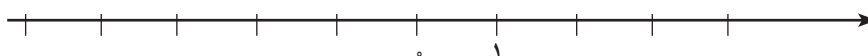
الف) $\frac{4}{3} \in [\frac{1}{4}, 2)$ ب) $-2 \in (-2, 0]$ پ) $0 \in (-2, 0]$ ت) $-2 \in \{-2, 0\}$ ث) $-1 \in \{-2, 0\}$

ج) $[-1, 2] \subseteq (-1, 2)$ چ) $\{0, 1\} \subseteq [-1, 2)$ ح) $\emptyset \subseteq (-17, 0]$ خ) $[2, 5) = (2, 5]$ د) $\sqrt{2} \in (0, 1)$

۲ هر یک از اعداد زیر عضو یک یا چند تا از بازه‌های داده شده هستند. هر عدد را به بازه یا بازه‌های نظیر آن وصل کنید.



۳ نمایش هندسی دو بازه $A = (-4, 2]$ و $B = (-1, 3]$ را روی محور زیر رسم کنید و سپس حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.



الف) $A \cap B$ ب) $A \cup B$ پ) $A - B$ ت) $B - A$

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

فعالیت

فرض کنید A مجموعه اعداد طبیعی کمتر از ۴ و B مجموعه اعداد صحیح کمتر از ۴ باشد.

الف) این دو مجموعه را با نمایش اعضای آنها مشخص کنید.

$A = \{ \quad \quad \quad \}$

$B = \{ \quad \quad \quad \}$

ب) A چند عضو دارد؟

پ) درباره تعداد اعضای B چه می‌توان گفت؟

مجموعه‌هایی مانند A را که تعداد اعضای آنها یک عدد حسابی است، **مجموعه‌های متناهی** می‌نامیم.

با توجه به مطلب فوق، B یک مجموعه متناهی نیست؛ زیرا نمی‌توان تعداد اعضای آن را با یک عدد بیان کرد. در واقع تعداد اعضای این مجموعه از هر عددی که در نظر بگیریم، بزرگ‌تر است. چنین مجموعه‌هایی را **مجموعه‌های نامتناهی** می‌نامیم.

کار در کلاس

۱) متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید. دربارهٔ مجموعه‌های متناهی سعی کنید تعداد دقیق یا تقریبی اعضای هر یک از آنها را بنویسید.

تعداد اعضا (در مورد مجموعه‌های متناهی)	متناهی	نامتناهی	مجموعه
			مجموعه اعداد اول یک رقمی
			مجموعه انسان‌های روی زمین
			مجموعه اعداد طبیعی فرد
			مجموعه سلول‌های عصبی مغز یک انسان
			مجموعه تمام دایره‌های به مرکز مبدأ مختصات
			مجموعه دانش‌آموزان مدرسه شما
			مجموعه اعداد طبیعی ده رقمی
			مجموعه درخت‌های جنگل‌های آمازون
			مجموعه کسرهای مثبت با صورت یک
			مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰
			بازه (۱, ۰)
			مجموعه مولکول‌های موجود در یک مول مشخص از آب

۲) دو مجموعهٔ متناهی نام ببرید.

۳) دو مجموعهٔ نامتناهی مثال بزنید که یکی از آنها زیرمجموعهٔ دیگری باشد.

۴) دو مجموعهٔ نامتناهی مثل A و B مثال بزنید که $A \subseteq B$ بوده و $B - A$ تک عضوی باشد.

تذکر: تعداد اعضای برخی از مجموعه‌های متناهی ممکن است بسیار زیاد باشد؛ با این حال با داشتن امکانات لازم و صرف وقت کافی ممکن است بتوان تعداد آنها را به دست آورد.



جنگل‌های آمازون

آمازون که به ریه‌های زمین مشهور است، جنگل بسیار بزرگی در شمال آمریکای جنوبی است و به دلیل همین وسعت، به آن **جنگل‌های آمازون** گفته می‌شود. حدود ۶۰ درصد این جنگل در خاک برزیل قرار دارد، همچنین بخش‌هایی از آن هم در کشورهای پرو، اکوادور، گویان، کلمبیا، ونزوئلا، بولیوی و سورینام واقع شده است. در واقع این جنگل بیش از سه برابر خاک کشور ما وسعت دارد. رودخانهٔ آمازون با طول حدود ۶۵۰۰ کیلومتر به عنوان پرآب‌ترین رودخانهٔ دنیا که ۵ درصد آب شیرین جهان را در خود جای می‌دهد، نیز از دل این جنگل عبور می‌کند. نتیجهٔ یک مطالعه بزرگ که مدت ۱۰ سال به طول انجامید، نشان می‌دهد که $\frac{39}{10000000000}$ اصله درخت در ۱۶۰۰۰ گونهٔ مختلف در جنگل‌های آمازون وجود دارد. با این حساب سهم هر فرد دنیا از این جنگل چند درخت می‌شود؟! با وجود این، مجموعه درخت‌های جنگل‌های آمازون یک مجموعه متناهی محسوب می‌شود یا نامتناهی؟



طرحی از سلول‌های عصبی مغز

الف) $\frac{1}{3}$ عددی بین 0° و 1° است. چهار عدد گویای دیگر از بازه $(0^\circ, 1^\circ)$ بنویسید و جواب خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.

ب) آیا می‌توان بین 0° و 1° به هر تعداد دلخواه عدد گویا ارائه کرد؟

پ) در مورد متناهی یا نامتناهی بودن اعداد گویای موجود در بازه $(0^\circ, 1^\circ)$ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ت) در مورد متناهی یا نامتناهی بودن Q چه می‌توان گفت؟

ث) اگر A دارای یک زیر مجموعه نامتناهی باشد، آنگاه A یک مجموعه خواهد بود.

تمرین

۱) فرض کنید U مجموعه تمام مضرب‌های طبیعی عدد ۵ باشد.

الف) U را با نمایش اعضای آن بنویسید.

ب) U متناهی است یا نامتناهی؟

پ) یک زیر مجموعه متناهی از U بنویسید.

ت) دو زیر مجموعه نامتناهی مانند C و D از U بنویسید؛ به طوری که $C \subseteq D$.

۲) متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) مجموعه اعداد طبیعی.

ب) مجموعه شمارنده‌های طبیعی عدد ۳۶.

پ) بازه $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$.

ت) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 2\}$.

ث) مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰۰.

۳) دو مجموعه نامتناهی مثال بزنید که اشتراک آنها مجموعه‌ای متناهی باشد.

۴) حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آنها روی یک محور به دست آورید:

الف) $(-2, 5] \cup (-3, 0)$ ب) $(-\infty, 6] \cap (2, 9)$

پ) $(3, +\infty) \cap (6, 10]$ ت) $(-\infty, 1) \cup [1, +\infty)$

ث) $(3, +\infty) - [2, 4)$ ج) $[2, 4) - (3, +\infty)$

۵) مجموعه $\mathbb{R} - \{3\}$ را روی محور نشان دهید و سپس آن را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید.

۶) اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای متناهی باشد، آنگاه A متناهی خواهد بود یا نامتناهی؟

عدد آووگادرو

در شیمی تعداد 6.02×10^{23} عدد از هر ذره (مولکول یا اتم) را یک مول از آن ذره می‌نامند. برای درک میزان بزرگی این عدد، فرض کنیم تعداد مولکول‌های موجود در یک مول آب را که ۱۸ گرم است، بتوانیم مولکول به مولکول بشماریم و کار شمردن هر مولکول آن هم یک ثانیه زمان ببرد. در این صورت کار شمارش نزدیک به 20° میلیون میلیارد سال به طول خواهد انجامید که این زمان حدود یک میلیون برابر عمر جهان است! به نظر شما، مجموعه مولکول‌های یک مول مشخص از آب، یک مجموعه متناهی است یا نامتناهی؟



درس دوم: متمم یک مجموعه

مجموعه مرجع

فرض کنیم U نشان دهنده مجموعه تمام کتاب‌های کتابخانه آیت الله العظمی مرعشی نجفی (ره) و A مجموعه کتاب‌های خطی آن باشد. اگر مجموعه‌ای را که شامل کتاب‌های چاپی این کتابخانه است، با A' نشان دهیم، آنگاه می‌توانیم نمودار پایین صفحه را درباره کتاب‌های این کتابخانه رسم کنیم. در این مثال U را که شامل تمام کتاب‌های کتابخانه می‌باشد، مجموعه مرجع و A' را متمم مجموعه A می‌نامیم.

در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همه مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه آن باشند، **مجموعه مرجع** می‌نامیم و آن را با U نشان می‌دهیم.

هرگاه U مجموعه مرجع باشد و $A \subseteq U$ ، آنگاه مجموعه $U-A$ را **متمم** A می‌نامیم و آن را با نماد A' نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر A' شامل عضوهای U است که در A نیستند.

فعالیت

الف دو مجموعه زیر را در نظر بگیرید و اعضای هر یک را روی محور نشان دهید.

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \leq 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 2\}$$

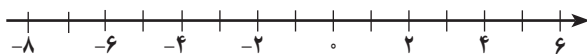
ب A را با نمایش اعضا و B را به صورت یک بازه بنویسید.

$$A = \{ \quad \quad \quad \}$$

$$B =$$

پ در مورد A ، اگر مجموعه مرجع را $\mathbb{Z}$ در نظر بگیریم، A' را مشخص کنید.

ت در مورد B با فرض این که $\mathbb{R}$ مجموعه مرجع باشد، B' را مشخص کنید و آن را روی محور نمایش دهید.



کتابخانه آیت الله العظمی مرعشی نجفی (ره)، در شهر مقدس قم یکی از بزرگ‌ترین کتابخانه‌های جهان اسلام است که کتاب‌های نفیس و قدیمی بسیاری را در موضوعات مختلف در خود جای داده است. این کتابخانه از نظر فراوانی نسخه‌های خطی، نخستین کتابخانه کشور و سومین کتابخانه جهان اسلام به‌شمار می‌رود. جدول زیر اطلاعات مختصری درباره تعداد کتاب‌های این کتابخانه در اختیار ما قرار می‌دهد.

نوع کتاب	تعداد
کتاب‌های خطی	۴۲۰۰۰ جلد
کتاب‌های چاپی	۱۰۰۰۰۰۰ جلد
کل کتاب‌ها	۱۰۴۲۰۰۰ جلد



U : مجموعه تمام کتاب‌های کتابخانه

A : کتاب‌های خطی

A' : کتاب‌های چاپی



نرخ پیکاری

جمعیت در سن کار در یک کشور را به عنوان مجموعه مرجع یعنی U در نظر می گیریم و فرض می کنیم A نشان دهنده مجموعه افراد شاغل این کشور باشد. در این صورت A' برابر مجموعه افراد بیکار و نسبت $\frac{n(A')}{n(U)}$ بیانگر نرخ بیکاری آن کشور خواهد بود.

۱ اگر U مجموعه شامل تمام استان‌های کشورمان باشد و A مجموعه استان‌های غیر ساحلی، آنگاه A' را با نمایش اعضای آن بنویسید.

۲ فرض کنیم U مجموعه تمام اتومبیل‌های پلاک‌گذاری شده کشور و B مجموعه اتومبیل‌های با پلاک فرد باشد. در این صورت B' چه مجموعه‌ای خواهد بود؟

۳ با فرض آنکه $\mathbb{N}$ مجموعه مرجع باشد، هر مجموعه را به متمم خودش وصل کنید.

$$\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\} \quad \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, \dots\}$$
$$\{3, 6, 9, 12, \dots\} \quad \text{---} \quad \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$$
$$\{1, 2, 3, \dots, 9\} \qquad \{1, 2, 4, 5, 7, 8, \dots\}$$
$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\} \qquad \{1^\circ, 11, 12, 13, 14, \dots\}$$

۴ مجموعه مرجع و A زیر مجموعه دلخواهی از آن می باشد. طرف دوم تساوی های زیر را بنویسید.

$$\emptyset' = \quad U' = \quad A \cup A' = \quad A \cap A' =$$

۵ الف) اگر $\mathbb{Z}$ را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم، آنگاه $\mathbb{N}'$ را با نوشتن اعضای آن مشخص کنید.

(ب) اگر $\mathbb{R}$ را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم، در این صورت $\mathbb{N}'$ را روی محور نمایش دهید.

۶ فرض کنیم $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ مجموعه مرجع باشد و $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{2, 4\}$. ابتدا A' و B' را بنویسید و سپس جدول‌های زیر را کامل کنید. از هر قسمت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$A' = \{ \quad \quad \quad \} \quad B' = \{ \quad \quad \quad \}$$

(A')'
{1, 2, 3}

$$\Rightarrow (A')' = A$$

$A \cup B$	$(A \cup B)'$	$A' \cap B'$
$\{ \quad \}$	$\{ \quad \}$	$\{ \quad \}$

$$\Rightarrow \dots = \dots$$

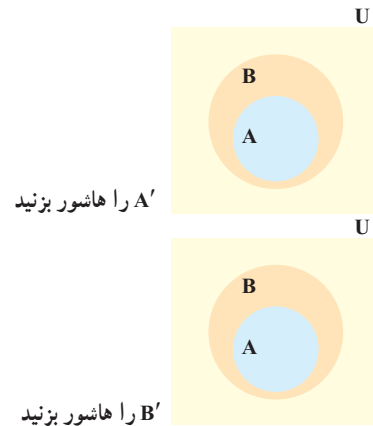
$\mathbf{A \cap B}$	$\mathbf{(A \cap B)'} $	$\mathbf{A' \cup B'}$
{ }	{ }	{ }

$$\Rightarrow \dots = \dots$$

A-B	A-(A∩B)	A∩B'
{ }	{ }	{ }

$$\Rightarrow \dots = \dots = \dots$$

۷ الف) فرض کنیم $A \subseteq B \subseteq U$ که در آن U مجموعه مرجع است. در نمودارهای مقابل A' و B' را مشخص کنید و سپس تعیین کنید که آیا بین A' و B' هم رابطه زیر مجموعه بودن برقرار است؟ چگونه؟



ب) اگر $U = \{a, b, c, d, e\}$ مجموعه مرجع باشد و $A = \{a, b\}$ و $B = \{a, b, c\}$ ، در این صورت $A \subseteq B$ می باشد. با به دست آوردن A' و B' نشان دهید که بین A' و B' هم رابطه زیر مجموعه بودن برقرار است.

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

در سال گذشته دیدیم که اگر A یک مجموعه متناهی باشد، آنگاه برای نشان دادن تعداد عضوهای آن از علامت $n(A)$ استفاده می شود. مثلاً اگر $G = \{2, 3, 5, 7\}$ در این صورت می توانیم بنویسیم $n(G) = 4$. در این بخش می خواهیم رابطه ای برای $n(A \cup B)$ به دست آوریم.

فعالیت

۱ یک تیم کوه نوردی متشکل از ۴ دانش آموز و ۳ دانشجوی عضو یک مؤسسه طرفدار محیط زیست است. اعضای این تیم به طور داوطلبانه در روزهای جمعه هر هفته کوه های اطراف شهر خود را از وجود زباله پاک سازی می کنند.

اعضای دانش آموز این تیم مجموعه $\{آنیتا، زهرا، الناز، الهام\} = A$ و اعضای دانشجوی آن مجموعه $\{فاطمه، معصومه، فرزانه\} = B$ هستند. همان گونه که دیده می شود، این دو مجموعه هیچ عضو مشترکی ندارند؛ به عبارت دیگر $A \cap B = \emptyset$.

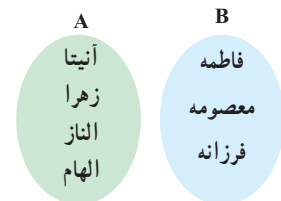


به هر دو مجموعه مثل A و B که فاقد عضو مشترک باشند، دو مجموعه جدا از هم یا مجزا می گوئیم.

الف) اعضای $A \cup B$ را که بیانگر اعضای تیم کوه نوردی می باشد، بنویسید و جدول زیر را تکمیل کنید.

$A \cup B =$

$n(A)$	$n(B)$	$n(A \cup B)$	$n(A \cap B)$
۴			



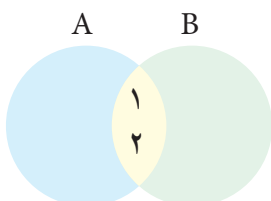
ب) تعداد عضوهای $A \cup B$ چه رابطه ای با $n(A)$ و $n(B)$ دارد؟ این رابطه را به صورت یک فرمول بنویسید.

ب) تحت چه شرایطی این فرمول برای دو مجموعه دلخواه A و B برقرار است؟

۲ الف) مجموعه شمارنده‌های طبیعی دو عدد ۲۸ و ۳۰ را به ترتیب A و B می‌نامیم. موارد خواسته شده را بنویسید.

$A = \{ \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots \} \Rightarrow n(A) = 6$
 مجموعه شمارنده‌های عدد ۲۸
 $B = \{ \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots \} \Rightarrow n(B) = \dots$
 مجموعه شمارنده‌های عدد ۳۰
 $A \cap B = \{ \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots \} \Rightarrow n(A \cap B) = \dots$
 شمارنده‌های مشترک ۲۸ و ۳۰
 $A \cup B = \{ \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots \} \Rightarrow n(A \cup B) = \dots$
 جدول زیر را کامل کنید.

$n(A)$	$n(B)$	$n(A \cap B)$	$n(A \cup B)$
۶			



پ) چرا رابطه‌ای را که در فعالیت (۱) به دست آوردید؛ یعنی $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ در این مثال برقرار نیست؟

ت) با تکمیل نمودار مقابل، سعی کنید رابطه درست برای $n(A \cup B)$ را حدس بزنید.

همان‌طور که دیدیم، اگر A و B دو مجموعه متناهی دلخواه باشند، داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

با توجه به نمودار فوق، در مورد علت درستی این رابطه با دوستان خود بحث کنید.

کاردر کلاس



۱ یک دوره جشنواره فیلم کوتاه با شرکت ۲۱ فیلم در موضوعات مختلف در حال برگزاری است که در بین آنها ۷ فیلم پویانمایی (کارتونی) و ۸ فیلم طنز وجود دارد، به طوری که ۳ تا از فیلم‌های پویانمایی با مضمون طنز می‌باشند. مطلوب است تعداد کل فیلم‌هایی که:

الف) پویانمایی یا طنزند.

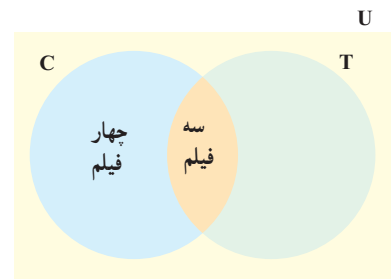
ب) غیرپویانمایی و غیرطنزند.

روش اول حل: مجموعه شامل تمام فیلم‌ها را با U، مجموعه فیلم‌های پویانمایی را با C و مجموعه فیلم‌های طنز را با T نشان می‌دهیم. جاهای خالی را پر کنید و جواب‌ها را بیابید.

الف) $n(C \cup T) = n(C) + n(T) - n(C \cap T) = \dots + \dots - \dots = \dots$

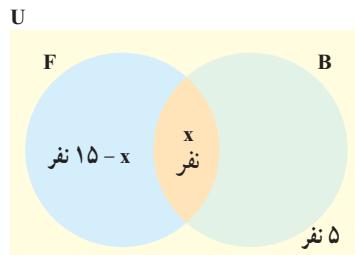
ب) $n(C \cup T)' = n(U) - n(C \cup T) = \dots - \dots = \dots$

روش دوم حل: در نمودار ون نمایش داده شده، دو مجموعه C و T سطح درون U را به چهار ناحیه جداگانه تقسیم کرده‌اند که عدد مربوط به دوتا از نواحی نوشته شده است. با نوشتن اعداد مربوط به دو قسمت دیگر، جواب قسمت‌های (الف) و (ب) را بیابید.



۲ در یک کلاس ۲۵ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هیچ یک از این دو تیم نباشند، مشخص کنید چند نفر از آنها عضو هر دو تیم هستند.

روش اول حل: با تکمیل نمودار زیر مقدار x را بیابید.



روش دوم حل: چون ۵ نفر عضو هیچ یک از این دو تیم نیستند، پس $n(B \cup F) = 20$. حال با نوشتن فرمول $n(B \cup F)$ می‌توان $n(B \cap F)$ را به دست آورد.

تمرین

۱ $\mathbb{R}$ را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید و سپس متمم هر یک از مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید.

(الف) $A = [-2, 3)$ (ب) $B = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ (پ) $C = (0, +\infty)$ (ت) $D = (-\infty, 1]$

۲ $\mathbb{N}$ را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید.

(الف) مجموعه‌ای نامتناهی مثل A مثال بزنید که A' هم نامتناهی باشد.

(ب) مجموعه‌ای نامتناهی مثل B مثال بزنید که B' متناهی باشد.

(پ) مجموعه‌ای متناهی مثل C مثال بزنید و C' را به دست آورید. C' متناهی است یا نامتناهی؟

۳ اگر $n(A) = 15$ ، $n(A \cap B) = 5$ و $n(A \cup B) = 30$ ، آنگاه $n(B)$ را محاسبه کنید.

۴ فرض کنیم A و B زیر مجموعه‌هایی از مجموعه مرجع U باشند، به طوری که $n(U) = 100$ ، $n(A) = 60$ ، $n(B) = 40$ و $n(A \cap B) = 20$ مطلوب است :

(الف) $n(A \cup B)$ (ب) $n(A \cap B')$ (پ) $n(A' \cap B)$ (ت) $n(A' \cap B')$

۵ در یک کلاس ۳۱ نفری، تعداد ۱۴ نفر از دانش‌آموزان عضو گروه سرود و ۱۹ نفر آنها عضو گروه تئاترند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هر دو گروه باشند، مطلوب است :

الف) تعداد دانش‌آموزانی که فقط عضو گروه سرودند.

ب) تعداد دانش‌آموزانی که عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند.



۶ در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای، مشخص شد که ۷۰ نفر آنها در یک ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. همچنین ۳۲ نفر از آنان نیز اعلام کردند که در این مدت از هر دو شرکت خرید کرده‌اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته :

الف) دست کم از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.

ب) فقط از شرکت A خرید کرده‌اند.

پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.

ت) از هیچ یک از این دو شرکت خرید نکرده‌اند.

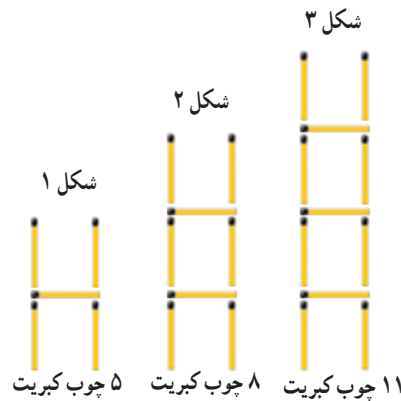


درس سوم: الگو و دنباله

الگو

مثال

به شکل‌های زیر و تعداد چوب کبریت‌های به کار رفته در هر یک از آنها توجه کنید.



n: شماره شکل	۱	۲	۳	۴	...	n	...
a_n : تعداد چوب کبریت‌ها	۵	۸	۱۱	...	...	...	...
رابطه بین a_n و n	$a_1=5$	$a_2=8$	$a_3=11$	...	...	$a_n=...$	...

به عنوان مثال ملاحظه می‌شود که، «تعداد چوب کبریت‌های شکل اول برابر ۵ است» که این مطلب را به طور خلاصه به صورت $a_1=5$ نشان داده ایم (می‌خوانیم: a اندیس ۱ برابر ۵). عبارت‌های $a_1, a_2, a_3, \dots$ متغیرهای اندیس دار^۱ نامیده می‌شوند که مقادیر آنها به ترتیب ۵، ۸ و ۱۱ است. به این اعداد جملات الگو هم گفته می‌شود. پس در واقع، عدد ۵ جمله اول الگوست؛ ۸ جمله دوم آن و به همین ترتیب الی آخر.

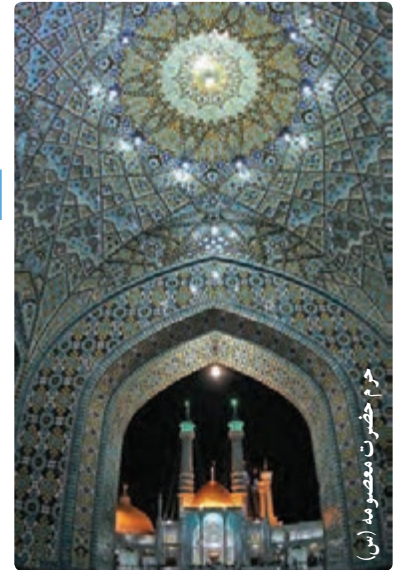
a_1	a_2	a_3
۵	۸	۱۱

الف) با این نمادگذاری، a_n نشان دهنده چیست و مقدار آن چقدر است؟

ب) a_n به چه معناست؟

پ) آیا می‌توانید حاصل a_n را بر حسب n به دست آورید؟ برای این کار فعالیت بعد را انجام دهید.

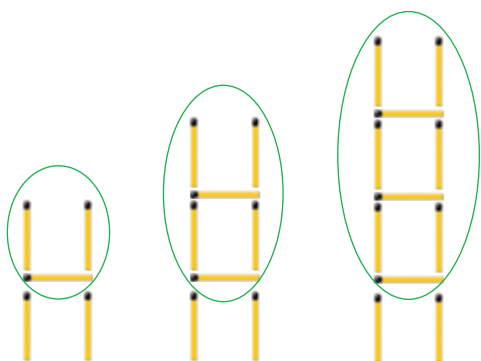
۱- در سال‌های گذشته با متغیرهایی مثل x و y ، سروکار داشتیم که اسم آنها تک حرفی بود؛ در حالی که نام متغیرهای اندیس دار که در اینجا به کار می‌بریم، دو بخشی است. پس تفاوت این دو نوع متغیر، تنها در شکل نام گذاری آنهاست و از نظر ماهیت، تفاوتی با هم ندارند.



دنیای اطراف ما سرشار از الگوهای مختلفی است. به عنوان نمونه، پیدایش شبانه روز و تغییر فصول مختلف سال جلوه‌ای از الگوی حاکم بر طبیعت است. از سوی دیگر نظم و قانونمندی‌های موجود در یک الگو به خودی خود برای ما جذاب است. چه بسا ممکن است طرح‌های روی یک گل آفتابگردان، شکل‌های هندسی روی یک سطح کاشی کاری شده یا ماریچ‌های روی میوه آناناس توجه شما را به خود جلب کرده باشند. به طور کلی می‌توان گفت الگو یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع یا اعداد است که ممکن است تکرار شونده یا رشد کننده یا ترکیبی از این دو باشد.

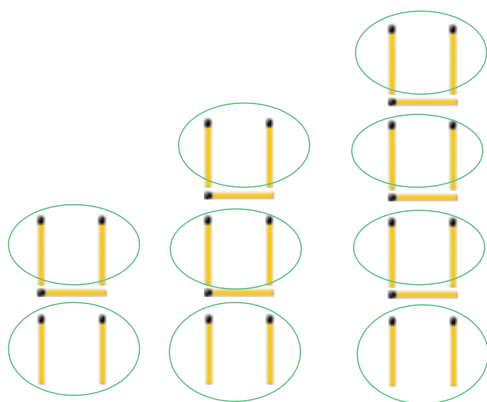
از طرف دیگر یکی از رسالت‌های مهم ریاضیات، مدل سازی کردن پدیده‌های طبیعی و پی بردن به الگوهای نهفته در آنهاست. اهمیت این موضوع به قدری است که برخی از ریاضیدانان معتقدند که ریاضی عبارت است از **علم مطالعه الگوها**.

۱ آیدا برای به دست آوردن حاصل a_n در مثال بالا، شکل های الگو را به صورت روبه رو در نظر گرفت. به کمک این روش، مقدار a_1 و a_n را به دست آورید.



$$a_1 = 1(2) + 2 \quad a_2 = 2(2) + 2 \quad a_3 = 3(2) + 2 \quad a_4 = 4(2) + 2 \quad \dots \quad a_n = \dots \quad a_n =$$

۲ آیساروش دیگری را به کار برد. او تعداد چوب کبریت های افقی و عمودی در هر شکل را به طور جداگانه مورد توجه قرار داد تا بتواند به مقدار a_n دست یابد. مقدار حاصل برای a_n از این روش را در جای مشخص شده بنویسید.



$$a_1 = 1 + 2(2) \quad a_2 = 2 + 3(2) \quad a_3 = 3 + 4(2) \quad a_4 = 4 + 5(2) \quad \dots \quad a_n = 1 + (1 + 1)2 \quad \dots \quad a_n =$$

چوب های عمودی چوب های افقی

۳ آیا شما راه دیگری را برای به دست آوردن حاصل a_n می دانید؟

۴ همان طور که در قسمت های (۱) و (۲) دیدیم، آیدا و آیساروش مقدار a_n را به ترتیب به صورت های $a_n = 3n + 2$ و $a_n = n + (n+1)(2)$ به دست آوردند. جواب آیساروش ساده کنید تا به شکل جواب آیدا درآید.

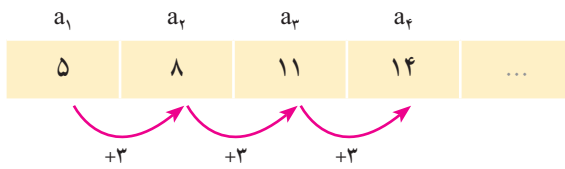
۵ به کمک رابطه $a_n = 3n + 2$ تعداد چوب کبریت های شکل بیستم را بیابید.

۶ با استفاده از رابطه $a_n = 3n + 2$ مشخص کنید که چندمین شکل در الگوی بالا دارای ۷۷ قطعه چوب کبریت است.

تذکر: در مثال بالا دیدیم که a_n بیانگر تعداد چوب کبریت های شکل n ام است. $a_n = 3n + 2$ را جمله عمومی الگو می نامیم؛ چرا که این رابطه در واقع ساختار جملات الگو را مشخص می کند و به کمک آن می توان مقدار هر جمله از الگو را به دست آورد. به عبارت دیگر، در اختیار داشتن جمله عمومی یک الگو به معنای آگاهی داشتن از تمام جملات آن الگو است.

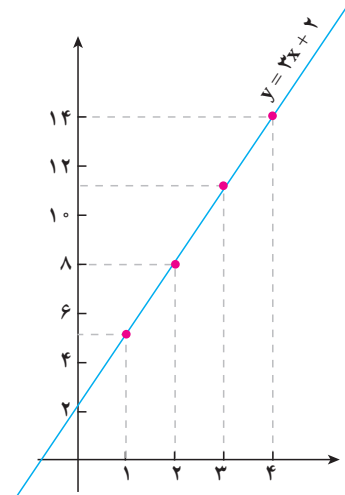
الگوی خطی

در الگوی مثال قبل دیدیم که هر جمله دقیقاً ۳ واحد بیش از جمله قبل از خودش بود.



n	a_n	(n, a_n)
۱	۵	(۱, ۵)
۲	۸	(۲, ۸)
۳	۱۱	(۳, ۱۱)
۴	۱۴	(۴, ۱۴)
...	...	...

چنین الگوهایی را که در آنها اختلاف هر دو جمله متوالی عددی ثابت است، الگوهای خطی می‌نامیم. برای پی بردن به دلیل این نام‌گذاری، ستون سوم جدول مقابل را در نظر می‌گیریم. اگر این نقاط را در صفحه مختصات مشخص کنیم، همگی آنها روی خط $y=3x+2$ قرار می‌گیرند. به عبارت دیگر مختصات تمام این نقاط در معادله خط گفته شده صدق می‌کند. شباهت بین معادله خط یعنی $y=3x+2$ و جمله عمومی الگو یعنی $a_n=3n+2$ اتفاقی نیست. عدد ۳ که در واقع اختلاف بین جملات متوالی الگو بود، در معادله خط به عنوان شیب خط ظاهر شده است که این مطلب همواره درست است.



به طور کلی الگوهایی را که جمله عمومی آنها به صورت $t_n = an + b$ است، الگوهای خطی می‌نامیم که در آن a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.

دیدیم که در یک الگوی خطی با جمله عمومی $t_n = an + b$ ، میزان تغییر جملات متوالی برابر a بود. به عبارت دیگر، اختلاف هر دو جمله متوالی در این الگوی خطی برابر ضریب n است. به عنوان مثال در یک الگوی خطی با جمله عمومی $t_n = -4n + 15$ ، هر جمله نسبت به جمله قبل از خودش ۴ واحد کاهش می‌یابد:

$11, 7, 3, -1, -5, -9, \dots$

مثال

در یک الگوی خطی، جملات چهارم و دهم به ترتیب ۱۷ و ۴۱ می‌باشند. جمله عمومی الگو را بیابید.

حل: فرض کنیم جمله عمومی به صورت $C_n = an + b$ باشد. پس داریم:

$$C_4 = 17 \Rightarrow a(4) + b = 17$$

$$C_{10} = 41 \Rightarrow a(10) + b = 41$$

$$\underline{6a = 24 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow b = 1}$$

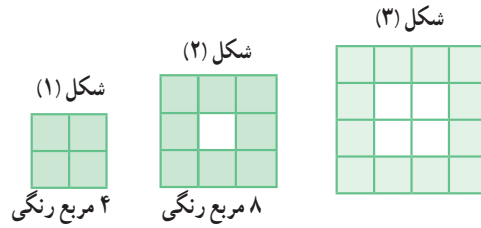
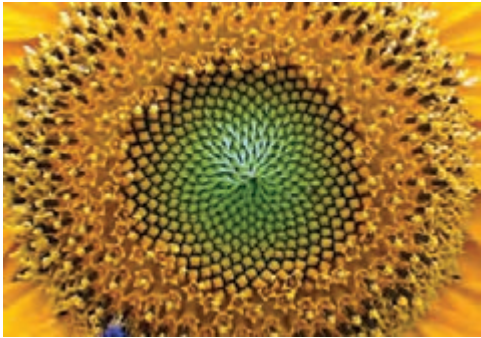
پس $C_n = 4n + 1$. بنابراین جملات الگو به صورت زیر خواهند بود:

$5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, \dots$

$\underline{C_4}$ $\underline{C_{10}}$



۱ شکل بعدی را در الگوی زیر رسم و جدول را کامل کنید.



n : شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵
b_n : تعداد مربع های رنگی	۴	۸	...	...	...
رابطه بین b_n و n	$b_1 = 4$	$b_2 =$	...	...	...

۲ توضیح دهید که چرا این الگو یک الگوی خطی محسوب می شود.

۳ با توجه به میزان افزایش جملات الگو، مقدار a در رابطه $b_n = an + h$ را بیابید و پس از حدس زدن مقدار h، حاصل b_n را به دست آورید.

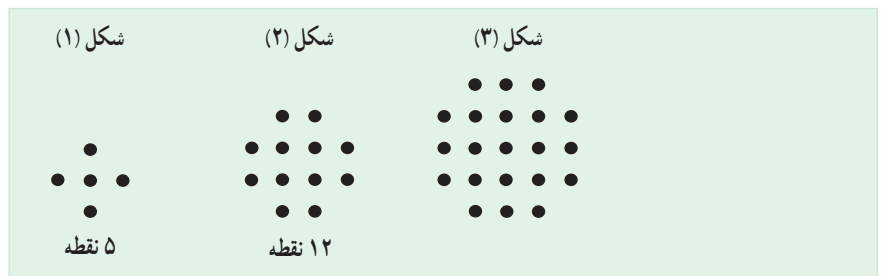
۴ شکل شماره ۲۵ دارای چند مربع رنگی است؟

۵ در چه مرحله ای از الگوی بالا، تعداد مربع های رنگی برابر ۱۴۴ است؟

الگوهای غیر خطی

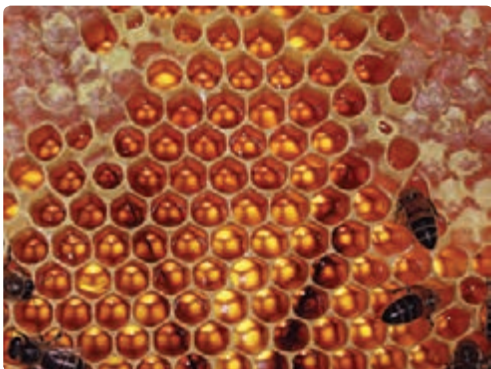
فعالیت

۱ در الگوی زیر، شکل بعدی را رسم کنید و جدول را کامل نمایید.

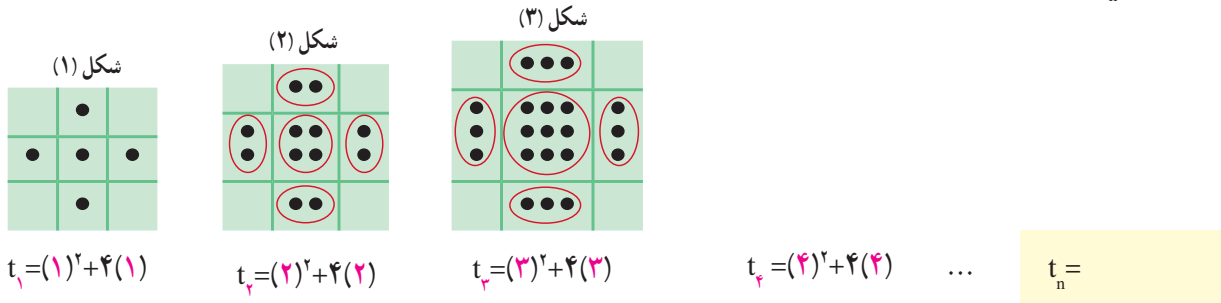


n : شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵
t_n : تعداد نقطه ها	۵	۱۲	...	...	...
رابطه بین t_n و n	$t_1 = 5$	$t_2 =$	...	...	...

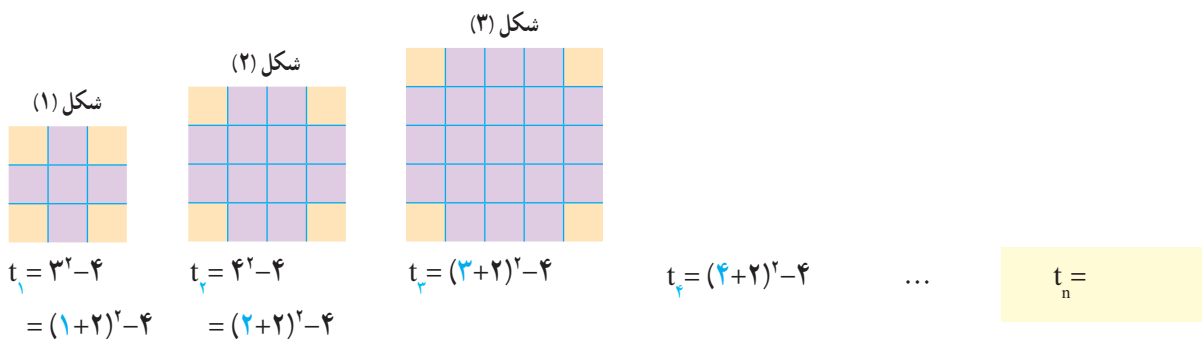
۲ آیا این الگو یک الگوی خطی است؟ چرا؟



۳ امیررضا برای یافتن جمله عمومی این الگو، مجموعه نقاط هر شکل را به صورت زیر دسته بندی کرد. از شکل های امیررضا کمک بگیرید و مقدار t_n را بیابید.



۴ امیرمحمد نگاه دیگری به مسئله داشت. او برای هر شکل این الگو، شکل دیگری را به صورت زیر نظیر کرد. با استفاده از این شکل ها مقدار t_n را بنویسید.



۵ نشان دهید که دو مقدار به دست آمده برای t_n در دو قسمت قبلی، برابرند.

۶ آیا شما روش دیگری برای یافتن t_n می شناسید؟ پاسخ خود را با جواب دوستانتان مقایسه کنید.

دنباله

در بخش قبل برای برخی الگوهای هندسی داده شده، یک الگوی عددی نظیر کردیم. به عنوان نمونه در فعالیت قبل، تعداد نقاط مربوط به شکل های متوالی الگو به صورت زیر بود:

۵, ۱۲, ۲۱, ۳۲, ۴۵,

این آرایش از اعداد، مثالی از یک دنباله است.

هر تعداد عدد را که پشت سرهم قرار می گیرند، یک **دنباله** می نامیم. این اعداد، جملات دنباله نامیده می شوند.

توجه داریم که ممکن است جملات یک دنباله فاقد الگو باشند. مشابه صفحات قبل، جمله اول این دنباله را با t_1 ، جمله دوم را با t_2 و به همین ترتیب جمله n ام یا جمله عمومی آن را با t_n نمایش می دهیم. پس:

$$t_1 = 5, t_2 = 12, t_3 = 21, \dots, t_n = n^2 + 4n, \dots$$

گفتنی است که این دنباله یک دنباله درجه ۲ نامیده می شود؛ زیرا جمله عمومی آن یک چند جمله ای درجه دوم است.

کار در کلاس

۱ دو دنباله دلخواه مثال بزنید.

۲ جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد، جاهای خالی را پر کنید.

الف) $a_n = n^2 - 1$: $0, 3, \dots, 15, 24$

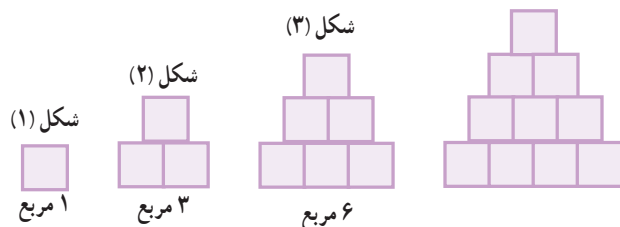
ب) $b_n = -n + 4$: $3, 2, 1, 0, \dots, -2$

ج) $c_n = -13 + 2n$: $-11, \dots, -7, \dots, -3$

۳ در هر سطر از جدول زیر یک دنباله آمده است. در هر مورد سه جمله بعدی را بنویسید. همچنین در پنج مورد اول سعی کنید یک جمله عمومی برای دنباله نیز حدس بزنید.

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	...	t_n	...
-1	-2	-3	-4				...	-n	...
1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{7}$				...		...
1	4	9	16				...		...
0/1	0/01	0/001	0/0001				...		...
-1	8	-27	64				...		...
5	18	31	44				...		
-2	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$				...		
1	2	4	7				...		
3	1	4	1	5			...		
1	1	2	3	5			...		
2	3	5	7				...		

شکل (۴)

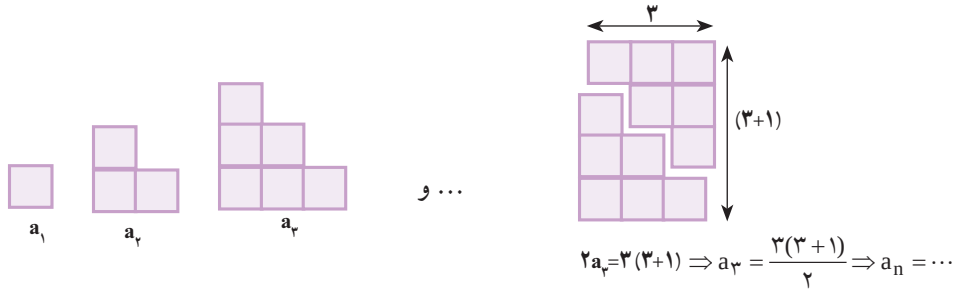


۴ الگوی مقابل را در نظر بگیرید.

الف) تعداد مربع ها در الگو را به صورت یک دنباله تا جمله ششم آن بنویسید.

ب) آیا دنباله حاصل یک دنباله خطی است؟ چرا؟

(ب) شکل‌های الگوی صفحه قبل را به صورت زیر تبدیل می‌کنیم. با دقت در تصویر زیر سعی کنید حاصل a_n را بر حسب n به دست آورید.



(ت) به کمک مرحله قبل حاصل عبارت زیر را بنویسید.

$$1 + 2 + 3 + \dots + n =$$

تمرین

۱ به الگوی روبه‌رو توجه کنید.



(الف) شکل بعدی را رسم کنید و تعداد کاشی‌های تیره آن را مشخص کنید.

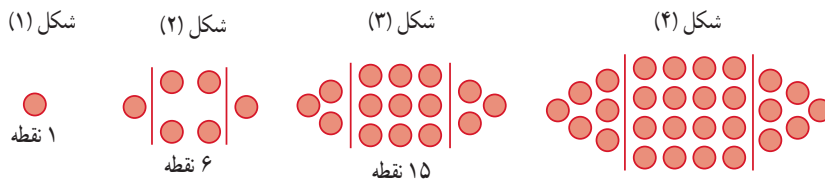
(ب) تعداد کاشی‌های تیره در هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله هفتم آن بنویسید.

(پ) اگر n تعداد کاشی‌های سفید و t_n تعداد کاشی‌های تیره باشد، مقدار t_n را بر حسب n بنویسید.

(ت) برای ۱۰۰ کاشی سفید، چند کاشی تیره لازم است؟

(ث) آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل ۵۰ کاشی تیره باشد؟ اگر هست، تعداد کاشی‌های سفید آن چقدر است؟

۲ الگوی زیر را در نظر بگیرید.



(الف) شکل بعدی را رسم کنید، سپس تعداد نقاط هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله ششم آن بنویسید.

(ب) جمله عمومی الگو را بیابید.

(پ) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟

۳ جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد چهار جمله اول دنباله را بنویسید و سپس به هر یک از آنها یک الگوی هندسی

نظیر کنید.

(الف) $a_n = 4n$ (ب) $b_n = 3n + 1$ (پ) $c_n = n^2 + 2$ (ت) $d_n = n^2 + n$

۴ برای هر یک از دنباله‌های درجه دو زیر جمله عمومی را به دست آورید و سپس برای هر کدام، یک الگوی هندسی نظیر کنید.

(الف) ۵, ۸, ۱۳, ۲۰, ۲۹, ... (ب) ۵, ۱۲, ۲۲, ۳۵, ۵۱, ...

درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی

دنباله حسابی

در صفحات قبل، مثال‌هایی از الگوهای عددی خطی ارائه شد. نام دیگر این گونه الگوهای عددی، دنباله‌های حسابی است. به عبارت دیگر:

دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به دست می‌آید، یک دنباله حسابی نامیده می‌شود و به آن عدد ثابت، قدر نسبت دنباله می‌گویند.

فعالیت



۱ سال‌های برگزاری مسابقات المپیک از آغاز هزاره سوم میلادی به بعد به صورت زیر است که جملات یک دنباله حسابی‌اند.

۲۰۰۰, ۲۰۰۴, ۲۰۰۸, ۲۰۱۲, ۲۰۱۶, ۲۰۲۰,

الف) جمله اول و قدر نسبت این دنباله را مشخص کنید. $t_1 = \square$, $d = \square$

ب) نهمین دوره المپیک در این هزاره در چه سالی برگزار خواهد شد؟

پ) با تکمیل جدول زیر، جمله عمومی این دنباله را به دست آورید.

t_1	t_2	t_3	t_4	...	t_9	...	t_n	...
۲۰۰۰	$۲۰۰۰ + ۱(۴)$	$۲۰۰۰ + ۲(۴)$	$۲۰۰۰ + ۳(۴)$	...	$۲۰۰۰ + (...)(۴)$	...	$۲۰۰۰ + (...)(۴)$	...

ت) بیست و چهارمین دوره المپیک در هزاره سوم میلادی در چه سالی برگزار خواهد شد؟

$t_{24} = \dots$

۲ با تکمیل جدول زیر، سعی کنید ساختار کلی جمله عمومی یک دنباله حسابی را به دست آورید.

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	...	t_n	...
t_1	$t_1 + 1d$	$t_1 + 2d$	$t_1 + 3d$			...	$t_1 + (...)d$	...
	+d	+d	+d					

همان طور که مشاهده شد،

جمله n ام یک دنباله حسابی با جمله اول t_1 و قدر نسبت d به صورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ است.

کار در کلاس

۱ در دنباله‌های حسابی زیر با مشخص کردن قدرنسبت، سه جمله بعدی را بنویسید و سپس جمله عمومی هر کدام را به دست آورید.

الف) $5, 10, 15, 20, \square, \square, \square, \dots$, $d =$, $a_n =$

ب) $1, 3, 5, 7, \square, \square, \square, \dots$, $d =$, $b_n =$

پ) $5, 9, 13, 17, \square, \square, \square, \dots$, $d =$, $c_n =$

ت) $13, 7, 1, -5, \square, \square, \square, \dots$, $d =$, $d_n =$

۲ A و B دو شرکت عرضه کننده سیم کارت‌های تلفن همراه با شرایط زیرند.

سیم کارت‌های شرکت B
هزینه ثابت ماهانه: ۳۰۰۰ تومان
هزینه هر دقیقه مکالمه: ۲۰ تومان

سیم کارت‌های شرکت A
هزینه ثابت ماهانه: ۲۰۰۰ تومان
هزینه هر دقیقه مکالمه: ۳۰ تومان



فرض کنیم a_n نشان دهنده هزینه کل n دقیقه مکالمه از طریق سیم کارت شرکت A و b_n هزینه مشابه برای استفاده از سیم کارت شرکت B باشد.
الف) مقدار a_n و b_n را بر حسب n بنویسید.
ب) جدول زیر را کامل کنید.

n : زمان مکالمه ماهانه (دقیقه)	۱	۴۰	۶۰	۱۱۰	۱۶۰
a_n : هزینه سیم کارت A	۲۰۳۰	۳۲۰۰	...	...	...
b_n : هزینه سیم کارت B	...	۳۸۰۰	...	...	...

پ) آیا a_n و b_n هر کدام می‌توانند جمله عمومی یک دنباله حسابی باشند؟ چرا؟

اگر جواب مثبت است، قدرنسبت هر یک را مشخص کنید.

ت) سارا در هر ماه حدود یک ساعت و فاطمه ماهانه تقریباً ۱۵۰ دقیقه با تلفن همراه مکالمه می‌کنند. به هر یک از آنها کدام سیم کارت را پیشنهاد می‌کنید؟ چرا؟

در دنباله حسابی زیر جمله شانزدهم را به دست آورید. $4, 11, 18, 25, \dots$
حل: آرتین و آرکان این مثال را به روش‌های زیر حل کرده‌اند. شما کدام روش را می‌پسندید؟

آرتین: از جمله عمومی دنباله حسابی استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} t_n &= t_1 + (n-1)d \\ t_{16} &= t_1 + 15d \\ &= 4 + (15)(7) \\ &= 109 \end{aligned}$$

آرکان: یک الگوی خطی با قدرنسبت ۷ داریم. پس

$$\begin{aligned} t_n &= 7n + b \\ t_1 &= 7(1) + b \\ 4 &= 7 + b \Rightarrow b = -3 \\ \text{جمله عمومی} \quad t_n &= 7n - 3 \\ t_{16} &= 7(16) - 3 \\ t_{16} &= 109 \end{aligned}$$



سوزن‌دوزی — سیستان و بلوچستان

کار در کلاس

- ۱ الف) یک دنباله حسابی با قدرنسبت مثبت مثال بزنید که جمله چهارم آن ۱۰ باشد.
ب) یک دنباله حسابی با قدرنسبت منفی مثال بزنید که جمله چهارم آن ۱۰ باشد.
پ) دنباله‌ای حسابی مثال بزنید که تنها سه جمله مثبت داشته باشد و سایر جملات آن منفی باشند.

- ۲ الف) بین ۱۸ و ۶۲ سه عدد را چنان قرار دهید که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله حسابی بدهند. در این حالت می‌گوییم بین ۱۸ و ۶۲ سه واسطه حسابی درج کرده‌ایم.
حل: با فرض اینکه ۱۸ جمله اول باشد، قدرنسبت را به دست آورید و جدول را کامل کنید.

$$\begin{cases} t_1 = 18 \\ t_5 = 62 \end{cases} \Rightarrow t_1 + 4d = 62 \Rightarrow d =$$

t_1				t_5
۱۸				۶۲

- ب) بین ۲۰ و ۸۰ به تعداد مشخص شده در هر مورد واسطه حسابی درج کنید.

۲۰			۸۰
۲۰			۸۰
۲۰			۸۰
۲۰			۸۰
۲۰			۸۰



پویانمایی روی سفال

تمرین

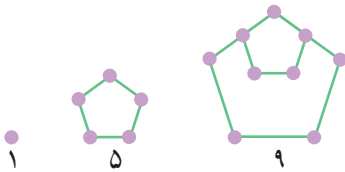
۱ از بین دنباله‌های زیر، دنباله‌های حسابی را مشخص کنید و در هر یک از آنها با تعیین قدرنسبت، جمله بیست و یکم را بیابید.

- (الف) $۳, ۱۰, ۱۷, ۲۴, \dots$ (ب) $۱, ۲, ۴, ۸, \dots$
 (پ) $\sqrt{۳}, ۲\sqrt{۳}, ۳\sqrt{۳}, ۴\sqrt{۳}, \dots$ (ت) $۱۰, ۷, ۴, ۱, \dots$
 (ث) $\frac{۲}{۵}, \frac{۳}{۵}, \frac{۴}{۵}, ۱, \dots$ (ج) $۲, ۲, ۲, ۲, \dots$

۲ در یک دنباله حسابی، جملات سوم و هفتم به ترتیب ۲۰ و ۵۶ است. دنباله را مشخص کنید؛ یعنی با به دست آوردن جمله اول و قدرنسبت، جملات دنباله را بنویسید.

۳ در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله اول ۳ و مجموع سه جمله بعدی آن ۳۹ است. دنباله را مشخص کنید.

۴ (الف) دو جمله بعدی الگوی مقابل را با رسم شکل بیابید و نوع دنباله را مشخص کنید.
 (ب) جمله عمومی آن را مشخص کنید.
 (پ) جمله چندانم این دنباله ۳۹۷ است؟



۵ (الف) واسطه حسابی بین ۵ و ۱۱ چه عددی است؟
 (ب) واسطه حسابی بین ۲۰ و ۳۰ چه عددی است؟
 (پ) از دو قسمت قبل چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۶ مسئله زیر در پاپیروس راینده آمده است. آن را حل کنید.
 « ۱۰۰ قرص نان را بین ۵ مرد چنان تقسیم کنید که سهم‌های دریافت شده، دنباله حسابی تشکیل دهند و یک سوم مجموع سه سهم بزرگ‌تر، مساوی مجموع دو سهم کوچک‌تر باشد».



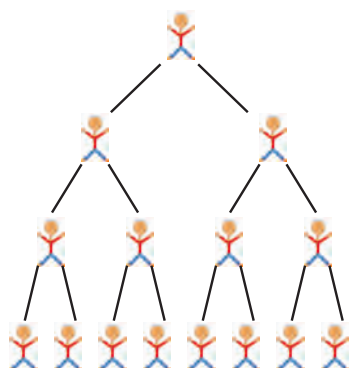
بخشی از پاپیروس راینده

قدیمی‌ترین کتاب ریاضی جهان

تاریخ تقریبی پاپیروس راینده (یا احمس) سال ۱۶۵۰ قبل از میلاد است. این پاپیروس یک متن ریاضی می‌باشد که تا حدودی ماهیت یک کتاب راهنما را دارد و شامل ۸۵ مسئله به خط هیراتی است. احمس کاتب، آن را از روی یک اثر قدیمی‌تر نسخه‌برداری کرده است. این پاپیروس در سال ۱۸۵۸ میلادی به وسیله مصرشناس اسکاتلندی، هنری راینده، در مصر خریداری شد و سپس به موزه بریتانیا منتقل شد. پاپیروس‌های راینده (۱۶۵۰ ق.م.) و مسکو (۱۸۵۰ ق.م.) از منابع اصلی اطلاعات ما درباره ریاضیات مصر باستان هستند. پاپیروس راینده در سال ۱۹۲۷ منتشر شد. این پاپیروس حدود $۵/۵$ متر طول و ۳۰ سانتی‌متر عرض دارد.

۱- Ahmes

۲- A. Henry Rhind



n : روز	t_n : تعداد افراد جدیدی که در روز n ام مبتلا می‌شوند
۱	۲ (امید و محسن)
۲	$2 \times 2 = 2^2$
۳	$4 \times 2 = 2^3$
۴	$8 \times 2 =$
۵	...
۶	...
$\vdots$	$\vdots$
n	$t_n =$

دنباله هندسی

علی به بیماری آنفولانزا مبتلا شده است. روز شنبه چند تن از دوستانش بدون آنکه ماسک زده باشند، به عیادت او آمدند. در این زمان ویروس آنفولانزا از راه تنفس وارد بدن امید و محسن می‌شود؛ چرا که آنها روز یکشنبه مبتلا به این بیماری شدند. اگر پیشگیری انجام نشود و موارد بهداشتی مراعات نگردد، پیش‌بینی می‌شود که انتشار ویروس تا مدتی با همین الگو ادامه یابد؛ یعنی امید و محسن در روز اول بیماری خود، هر کدام ویروس را به ۲ نفر دیگر منتقل کنند؛ به‌طوری که روز دوشنبه ۴ نفر جدید از طریق آنها مبتلا شوند و این روند ادامه پیدا کند.

فعالیت

- ۱ جدول مقابل را کامل کنید و t_n را بیابید.
- ۲ در روز دهم چند فرد جدید مبتلا می‌شوند؟
- ۳ در روز یازدهم چند شخص جدید به این بیماری مبتلا می‌شوند؟
- ۴ در روز چندم تعداد افراد جدیدی که به بیماری آنفولانزا مبتلا می‌شوند، برابر ۱۶۳۸۴ نفر می‌شود.

در مثال بالا می‌توانیم تعداد مبتلایان جدید هر روز را به‌صورت دنباله زیر بنویسیم:

۲, ۴, ۸, ۱۶, ۳۲, ...

این دنباله یک دنباله حسابی نیست؛ چرا که تفاضل جملات متوالی آن ثابت نیست، بلکه نسبت تقسیم هر دو جمله متوالی آن برابر عددی ثابت است.

$$\dots = \frac{32}{16} = \frac{16}{8} = \frac{8}{4} = \frac{4}{2} = 2$$

اینگونه دنباله‌ها را دنباله‌های هندسی می‌نامیم. یعنی:

دنباله هندسی، دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به‌جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت و غیرصفر به‌دست می‌آید. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می‌نامیم. جمله اول هم باید غیرصفر باشد.

فعالیت

در حالت کلی در یک دنباله هندسی، اگر جمله اول t_1 و قدرنسبت r باشد، جملات آن به شکل زیر خواهند بود. جدول را تکمیل کنید.

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	...	t_n	...
t_1	$t_1 r$	$t_1 r^2$			...		...

$\xrightarrow{\times r} \xrightarrow{\times r} \xrightarrow{\times r} \xrightarrow{\times r}$

با دقت در الگوی به کار رفته در جملات بالا دیده می‌شود که :

جمله n ام دنباله هندسی به صورت $t_n = t_1 r^{n-1}$ است که در آن t_1 جمله اول و r قدرنسبت می‌باشد ($t_1, r \neq 0$).

کار در کلاس

- ۱) نرگس و نگار برای محاسبه هفتمین جمله دنباله هندسی $9, 3, 1, \dots$ روش‌های مقابل را به کار برده‌اند. کدام یک از آنها این مثال را درست حل کرده‌اند؟ توضیح دهید.

نگار	نرگس
$r = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$	$r = \frac{9}{3} = 3$
$t_7 = 9\left(\frac{1}{3}\right)^{7-1}$	$t_7 = 9(3)^{7-1}$
$= \frac{1}{81}$	$= 6561$

- ۲) در دنباله‌های هندسی زیر، قدرنسبت را مشخص کنید و دو جمله بعدی را بنویسید. سپس جمله عمومی هر دنباله را به دست آورید.

الف) $2, 6, 18, 54, \boxed{162}, \boxed{486}, \dots, a_n = 2 \times 3^{n-1}$

$\begin{matrix} a_1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \times 3 \quad \times 3 = r \end{matrix}$

ب) $5, 10, 20, 40, \boxed{}, \boxed{}, \dots, b_n =$

پ) $6, -60, 600, -6000, \boxed{}, \boxed{}, \dots, c_n =$

ت) $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \boxed{}, \boxed{}, \dots, d_n =$

- ۳) الف) اگر بین ۳ و ۴۸، عدد ۱۲ را قرار دهیم، سه عدد حاصل تشکیل دنباله هندسی می‌دهند. در این حالت می‌گوییم ۱۲ یک **واسطه هندسی** بین ۳ و ۴۸ است. برای این کار به جز ۱۲ چه عدد دیگری را می‌توان در نظر گرفت؟

$$\begin{cases} t_1 = 3 \\ t_3 = 48 \Rightarrow t_1 r^2 = 48 \Rightarrow \dots \Rightarrow r = \dots \end{cases}$$

۳		۴۸
---	--	----

- ب) بین ۳ و ۴۸ سه واسطه هندسی درج کنید. آیا جواب یکتاست؟

۳				۴۸
---	--	--	--	----

- پ) جاهای خالی را طوری پر کنید که در هر مورد یک دنباله هندسی حاصل شود.

	۱۰		۴۰۰۰
۱۰			۸۰۰۰۰
۴			۹۷۲



۱ از بین موارد زیر، دنباله‌های هندسی را مشخص کنید و قدر نسبت آنها را بنویسید.

الف) $۷, ۲۸, ۱۱۲, ۴۴۸, \dots$

ب) $۲\sqrt{۵}, ۴\sqrt{۵}, ۶\sqrt{۵}, ۸\sqrt{۵}, \dots$

پ) $۱, \frac{-1}{۲}, \frac{1}{۴}, \frac{-1}{۸}, \dots$

ت) $۵, ۵, ۵, ۵, \dots$

۲ چند دنباله هندسی با قدر نسبت $\frac{۴}{۵}$ می‌توان ساخت؟ دو مورد را بنویسید.

۳ درستی یا نادرستی جملات زیر را بررسی کنید. در صورت درست بودن توضیح دهید و در صورت نادرست بودن مثال نقض ارائه کنید.
الف) هر دنباله، یا حسابی است یا هندسی.

ب) دنباله‌ای وجود ندارد که هم حسابی باشد و هم هندسی.

۴ علی دوچرخه‌ای را به قیمت ۵۰۰ هزار تومان خرید. فرض کنید قیمت دوچرخه دست دوم، در هر سال ۲۰ درصد نسبت به سال قبل از خودش کاهش یابد.

الف) اگر او بعد از ۳ سال قصد فروش دوچرخه‌اش را داشته باشد، به چه قیمتی می‌تواند آن را بفروشد؟

ب) قیمت دوچرخه بعد از گذشت n سال از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟

۵ حاصل ضرب بیست جمله اول دنباله هندسی مقابل را محاسبه کنید. $۲, ۴, ۸, \dots$

۶ جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ می‌باشند. دنباله را مشخص کنید.

۷ بنابر آمار منتشر شده از جانب پزشکی قانونی کشور، آمار تلفات جاده‌ای از عدد ۲۷۷۵۹ نفر در سال ۱۳۸۴ به عدد ۱۶۷۷۸ نفر در سال ۱۴۰۰ کاهش یافته است که نشان‌دهنده حدود ۳ درصد کاهش سالانه در این دهه است. اگر آمار حوادث رانندگی در کشور با همین سرعت کاهش یابد،

الف) پیش‌بینی می‌شود در هر یک از سال‌های منتهی به سال ۱۴۰۵ چند نفر از هم‌وطن‌های ما جان خود را در حوادث رانندگی از دست بدهند؟ نتایج را در جدول زیر ثبت کنید.

سال	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲	۱۴۰۳	۱۴۰۴	۱۴۰۵
تعداد تلفات مورد انتظار						

ب) اعداد حاصل، چه نوع دنباله‌ای تشکیل می‌دهند؟

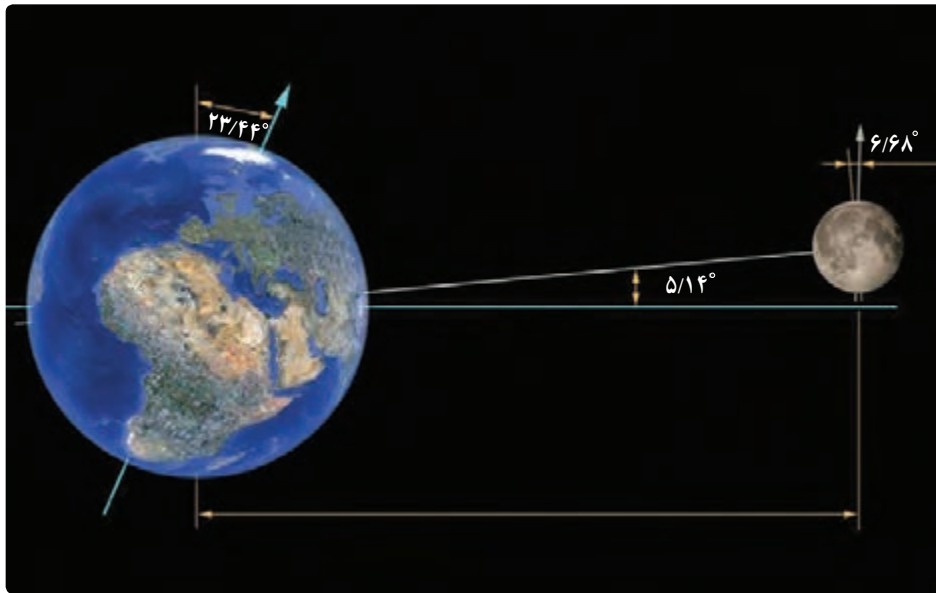
مثلثات



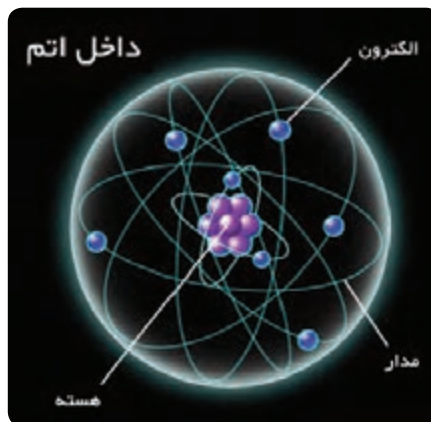
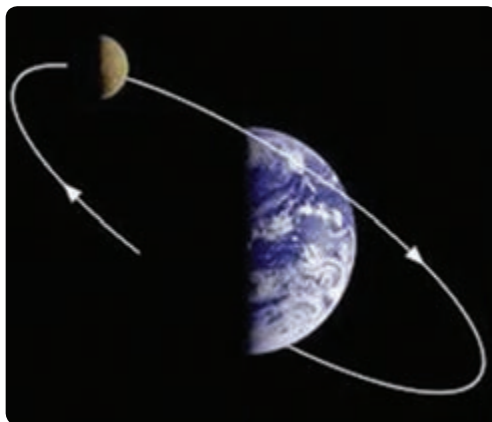
فصل



الشَّمْسُ وَالْقَمَرُ يُحْسَبَانِ (الرحمن : ٥)
خورشید و ماه برابر حساب (منظمی در چرخش و گردش) هستند.



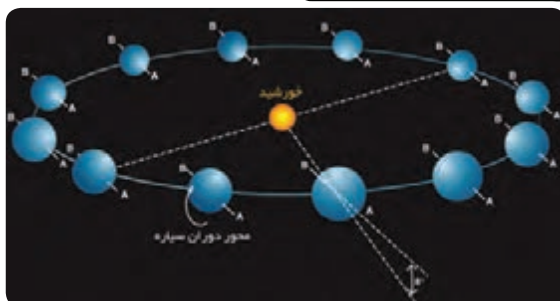
فصل یا موسم یکی از تقسیمات سال بر اساس تغییرات آب و هوایی کره زمین است. به علت مایل بودن محور گردش زمین به دور خورشید نسبت به صفحه استوا و در نتیجه تغییر طول روز و شدت تابش و دما، فصل ها پدید می آیند.



درس اول نسبت های مثلثاتی

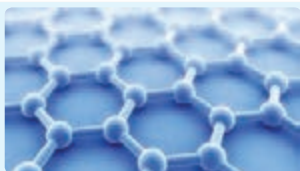
درس دوم دایره مثلثاتی

درس سوم روابط بین نسبت های مثلثاتی





برای اینکه اتومبیل‌ها در پیچ جاده‌ها بتوانند بدون خطر انحراف، حرکت کنند، در جاده شیب عرضی ایجاد می‌کنند، یعنی آن را طوری می‌سازند که قسمت بیرونی جاده نسبت به قسمت درونی، مرتفع‌تر باشد.



در صفحات گرافن، هر اتم کربن با سه اتم کربن دیگر پیوند دارد که زوایای بین این پیوندها 120° درجه است. در آینده‌ای نه‌چندان دور، بهترین میکروفن‌های جهان با استفاده از گرافن ساخته می‌شوند. این میکروفن‌ها، قابلیت ردیابی امواج صوتی فراتر از دامنه‌ی شدت شنوایی انسان را دارند.

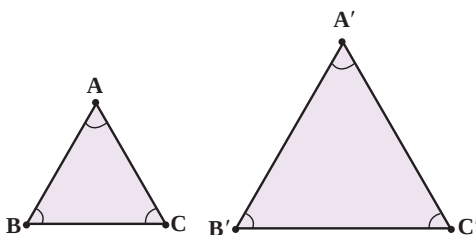
درس اول: نسبت‌های مثلثاتی

مثلثات شاخه‌ای از ریاضیات است که به بررسی روابط بین زوایا و اضلاع یک مثلث می‌پردازد. یکی از اهداف این علم، اندازه‌گیری فاصله‌ها به صورت غیرمستقیم است. مثلثات در علوم مهندسی، فیزیک، نقشه‌برداری، دریانوردی، نجوم و غیره کاربرد دارد. به عنوان مثال، فرض کنید یک هواپیما در ارتفاع ۲ کیلومتری از سطح زمین در حال فرود آمدن است.



اگر زاویه‌ی هواپیما با افق 13° باشد، می‌خواهیم محل دقیق فرود هواپیما را بدانیم. این مسئله و مسائلی نظیر این با استفاده از روابط مثلثاتی حل می‌شوند.

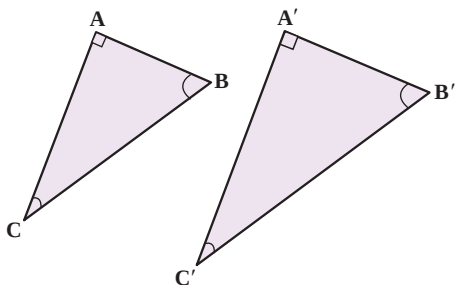
برای معرفی مفهوم مثلثات، به مفهوم تشابه نیاز داریم. در پایه‌ی نهم با این مفهوم آشنا شدید و دیدید که دو مثلث با هم متشابه‌اند، هرگاه زوایای نظیر در آنها برابر و نسبت اضلاع متناظر نیز با هم برابر باشند. یعنی اگر $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ، آنگاه



داریم: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$ و $\hat{A} = \hat{A'}, \hat{C} = \hat{C'}, \hat{B} = \hat{B'}$ در هندسه ثابت می‌شود:

هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث، متشابه‌اند.

به عنوان یک نتیجه از مطلب بالا می‌توان دید:



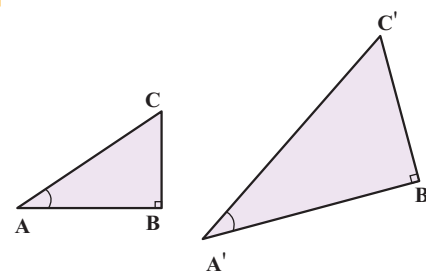
اگر $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ در شکل مقابل قائم الزاویه باشند و داشته باشیم $\hat{C} = \hat{C'}$ ، آنگاه

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

کار در کلاس

۱ در مثلث‌های قائم‌الزاویه ABC و $A'B'C'$ ، $\hat{A} = \hat{A}'$. جاهای خالی را کامل کنید.

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$



۲ از تساوی $\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'}$ ، می‌توان نتیجه گرفت $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$ (چرا؟). با توجه به این نکته، جاهای خالی را کامل کنید:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \text{ و } \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}$$

نتیجه: اگر زاویه A از مثلث قائم‌الزاویه ABC با زاویه A' از مثلث قائم‌الزاویه $A'B'C'$ (مطابق شکل بالا) برابر باشد، داریم:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'} \text{ و } \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \text{ و } \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

فعالیت

۱ در شکل سمت راست، درستی تساوی $\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{AE}$ را بررسی کنید.

۲ نقطه دیگری مثل M را در امتداد AC در نظر بگیرید و از آن نقطه، عمودی بر ضلع دیگر زاویه A رسم کنید و پای عمود را N بنامید. اکنون جاهای خالی را کامل کنید:

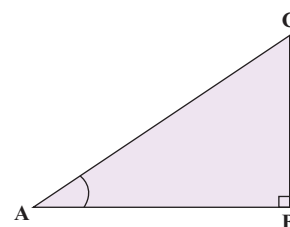
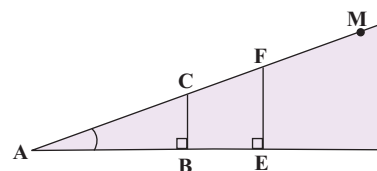
$$\frac{BC}{AB} = \frac{MN}{AN} = \frac{EF}{AE}$$

همان‌طور که در «کار در کلاس» بالا دیدیم، در مثلث قائم‌الزاویه ABC برای زاویه معین و حاده A ، نسبت طول ضلع مقابل زاویه A ، به طول ضلع مجاور آن همواره مقداری ثابت است. این نسبت را تانژانت زاویه A می‌نامیم و آن را با $\tan A$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر، در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، داریم:

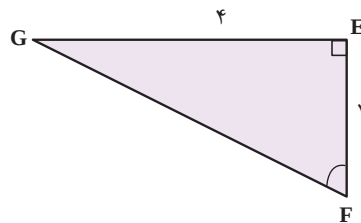
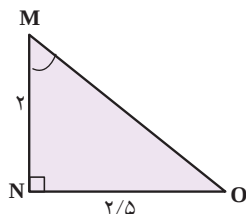
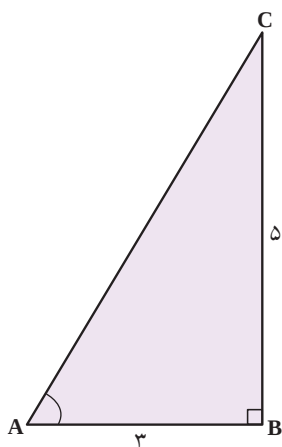
$$\tan A = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A}{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A} = \frac{BC}{AB}$$

عکس تانژانت زاویه A را کتانژانت می‌نامیم و آن را با $\cot A$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر، در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:

$$\cot A = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A}{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A} = \frac{AB}{BC}$$



۱ در هر یک از شکل های زیر، جاهای خالی را کامل کنید.



$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{3}$$

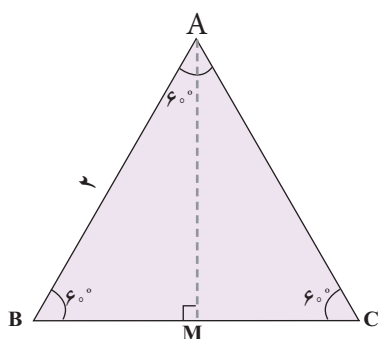
$$\cot M = \frac{MN}{NO} = \frac{2}{2/5}$$

$$\tan F = \frac{GE}{EF} = \frac{4}{2}$$

$$\cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$$

$$\tan M = \frac{NO}{MN} = \frac{2/5}{2}$$

$$\cot F = \frac{EF}{GE} = \frac{2}{4}$$



۲ مثلث متساوی الاضلاع ABC با اضلاعی به طول ۲ واحد را در نظر بگیرید.

الف) محل برخورد نیمساز زاویه A با پاره خط BC را M بنامید. با توجه به خواص مثلث متساوی الساقین، AM ضلع BC است. بنابراین

$$BM = MC = \dots\dots\dots$$

ب) با استفاده از رابطه فیثاغورس، طول AM و حاصل کسره های زیر را به دست آورید.

$$\tan 30^\circ = \frac{BM}{AM} = \dots\dots\dots, \tan 60^\circ = \frac{AM}{BM} = \dots\dots\dots$$

پ) با استفاده از یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین، تانژانت و کتانژانت زاویه ۴۵° را پیدا کنید.

در هر مثلث قائم الزاویه ABC، نسبت طول ضلع مقابل زاویه حاده A به طول وتر، همواره مقداری ثابت است که آن را سینوس زاویه A می نامیم و با $\sin A$ نشان می دهیم. به عبارت دیگر

$$\sin A = \frac{BC}{AC}$$

همچنین نسبت طول ضلع مجاور زاویه حاده A به طول وتر نیز مقداری ثابت است که آن را کسینوس زاویه A می نامیم و آن را با $\cos A$ نشان می دهیم. به عبارت دیگر

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \frac{\sin A}{\cos A}, \text{ به سادگی می توان دید در مثلث قائم الزاویه } ABC, \cot A = \frac{\cos A}{\sin A} \text{ این رو به طور مشابه، می توان دید.}$$

در یک مثلث قائم الزاویه، نسبت های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را نسبت های مثلثاتی می نامیم.

مثال

خانم جلالی از دانش آموزان خواست تا نسبت های مثلثاتی زاویه 45° را حساب کنند. او ابتدا یک مربع با اضلاعی به طول ۱ واحد رسم کرد و از دانش آموزان خواست تا قطر AC را رسم کرده و سپس طول آن را حساب کنند.

فربیا: با توجه به اینکه مثلث ADC قائم الزاویه است، داریم $(AD)^2 + (DC)^2 = (AC)^2$. در نتیجه $(AC)^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ و از این رو $(AC)^2 = 2$. چون اندازه قطر همواره عددی مثبت است، پس $AC = \sqrt{2}$.

معلم: با توجه به اینکه مثلث ADC متساوی الساقین است، از این رو $\hat{A}_1 = \hat{C}_1 = \dots\dots\dots$.

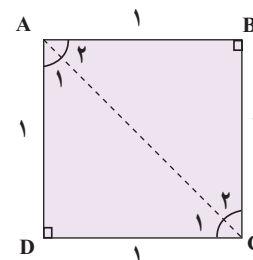
مینا: طبق تعریف سینوس، $\sin A_1 = \sin 45^\circ = \frac{DC}{\text{وتر}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$.

سبا: من هم می توانم با توجه به روابط بالا کسینوس 45° را پیدا کنم.

$$\cos A_1 = \cos 45^\circ = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}.$$

مریم: اکنون در مثلث قائم الزاویه ADC، طبق تعریف داریم

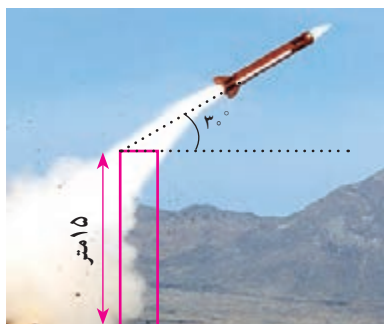
$$\tan A_1 = \tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1 \text{ و } \cot A_1 = \cot 45^\circ = \frac{1}{1} = 1.$$



کار در کلاس

به کمک شکل فعالیت قبل، با پیدا کردن نسبت های مثلثاتی زاویه های 30° و 60° ، جدول زیر را کامل کنید (در صورت لزوم، کسر ها را گویا کنید).

مقدار	30°	45°	60°
$\sin A$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$\cos A$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$\tan A$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$
$\cot A$	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$



یک موشک در ارتفاع ۱۵ متری از سطح زمین و با زاویه 3° پرتاب می‌شود. می‌خواهیم بدانیم پس از طی ۲۰۰۰ متر با همین زاویه، موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می‌رسد؟
 حل: ابتدا یک مدل ریاضی برای حل این مسئله می‌سازیم. با توجه به شکل زیر، به سادگی می‌توان دید، ارتفاع موشک از سطح زمین برابر است با:

$$BC + MC = BC + \dots\dots\dots$$

بنابراین کافی است طول BC را پیدا کنیم. می‌دانیم $\sin 3^\circ = \frac{1}{2}$. پس در مثل قائم‌الزاویه ABC داریم:

$$\sin 3^\circ = \frac{1}{2} = \frac{BC}{2000} \Rightarrow BC = \dots\dots\dots$$

و از این رو

$$\text{ارتفاع موشک} = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

فعالیت

۱ یک زاویه 5° رسم کنید. با تشکیل یک مثلث قائم‌الزاویه و اندازه‌گیری طول‌های موردنظر با یک خط‌کش مدرج، نسبت‌های مثلثاتی زاویه 5° را به صورت تقریبی حساب کنید. سپس با ماشین حساب، مقادیر واقعی را به دست آورید و با مقادیر قبل مقایسه کنید.



۲ می‌خواهیم مساحت مثلث ABC در شکل زیر را پیدا کنیم. می‌دانیم:

$$\text{ارتفاع} \times \text{قاعده} \times \frac{1}{2} = \text{مساحت مثلث ABC}$$

الف) با توجه به اینکه $\sin 5^\circ \approx 0.087$ ، داریم:

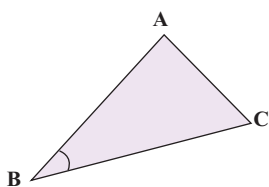
$$\sin 5^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{AH}{10} \Rightarrow AH \approx \dots\dots\dots$$

ب) با توجه به قسمت (الف) داریم:

$$\text{مساحت مثلث ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC \approx \frac{1}{2} \times \dots\dots\dots \times \dots\dots\dots \approx \dots\dots\dots$$

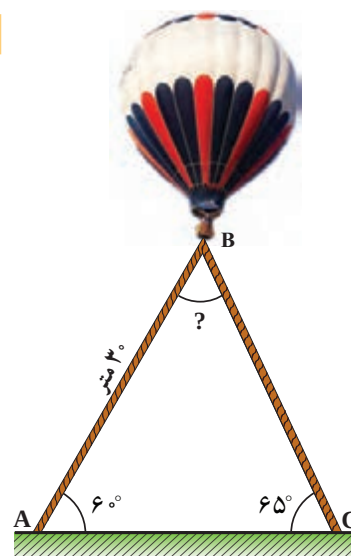
۳ در هر مثلث، با معلوم بودن مقادیر طول دو ضلع مثلث و اندازه زاویه بین آنها نشان دهید:

$$\text{مساحت } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin B.$$



کار کلاس

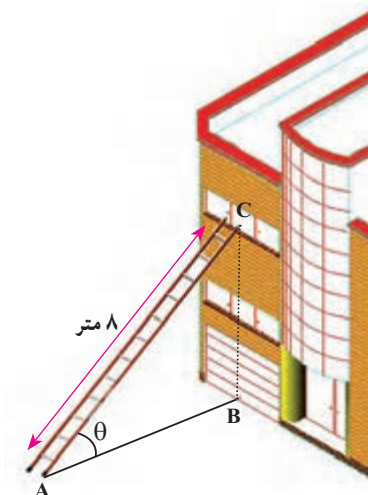
۱ در راه پیمایی ۲۲ بهمن، یک بالن اطلاع رسانی توسط دو طناب به زمین بسته شده است. طول یکی از طناب‌ها ۳۰ متر است. می‌خواهیم طول طناب دوم را پیدا کنیم. الف) ابتدا اندازه زاویه B را به دست آورید. سپس ارتفاع وارد بر ضلع AC را رسم کنید و آن را BH بنامید.



ب) طول BH را با استفاده از سینوس زاویه A به دست آورید.

پ) اکنون با استفاده از سینوس زاویه C، ۶۵°، طول طناب دوم را پیدا کنید. ($\sin 65^\circ \approx 0.9$)

۲ مطابق شکل، نردبانی به طول ۸ متر در زیر پنجره ساختمانی قرار گرفته است. اگر زاویه نردبان با سطح زمین $\theta = 30^\circ$ باشد، ارتفاع پنجره تا زمین را محاسبه کنید. فاصله پای نردبان تا ساختمان چقدر است؟



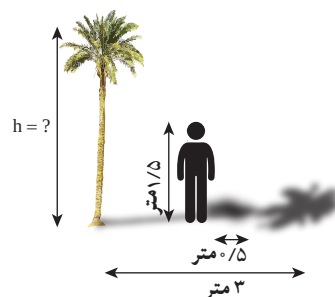
$$\sin \theta = \frac{\text{.....}}{8} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BC}{8} \Rightarrow 2BC = \text{.....} \Rightarrow BC = \text{.....}$$

اکنون به کمک رابطه فیثاغورس داریم:

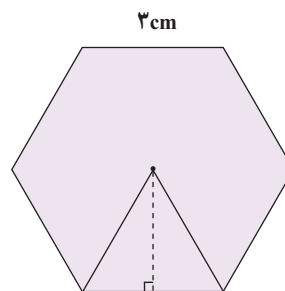
$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = \text{.....} - \text{.....} = \text{.....} \Rightarrow AB = \text{.....}$$

تمرین

۱ علی می‌خواهد ارتفاع یک درخت را که طول سایه آن ۳ متر است، حساب کند. قد علی ۱/۵ متر و طول سایه او در همان لحظه ۵/۵ متر است. ارتفاع درخت چقدر است؟



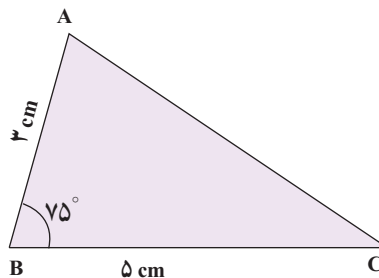
۲ مساحت شش ضلعی منتظم زیر را به دست آورید.



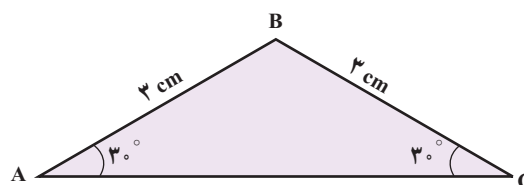
۳ یک هواپیما در ارتفاع ۲ km از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویه هواپیما با افق حدود 13° باشد، هواپیما در چه فاصله ای از نقطه A فرود می آید.
 $\tan 13^\circ \approx 0.23$



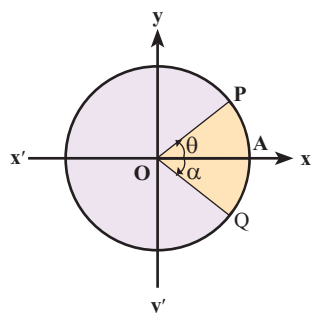
۴ فرض کنید $\sin 75^\circ \approx 0.96$. مساحت مثلث ABC در شکل زیر را به دست آورید.



۵ مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.



درس دوم: دایره مثلثاتی



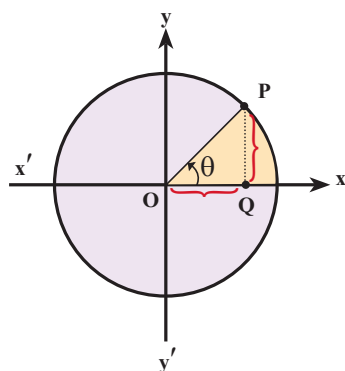
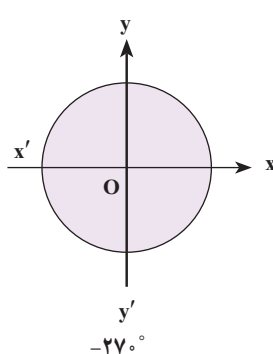
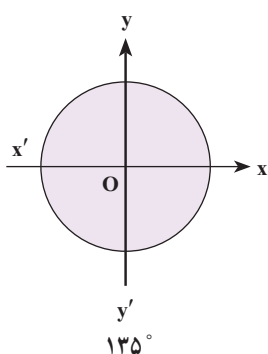
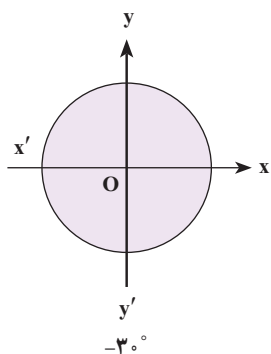
دایره روبه‌رو، به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۱ را در نظر بگیرید. اگر با حرکت در خلاف جهت عقربه‌های ساعت به نقطه‌ای مانند P برسیم، زاویه $\widehat{AOP}$ مثبت است و اگر با حرکت در جهت عقربه‌های ساعت به نقطه‌ای مانند Q برسیم، زاویه $\widehat{AOQ}$ منفی است. چنین دایره‌ای را یک دایره مثلثاتی می‌نامیم.

مثال

در هر یک از دایره‌های مثلثاتی سمت راست، مقدار زاویه‌های -90° ، 90° ، -21° و 225° داده شده‌اند.

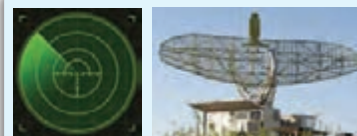
فعالیت

۱ هر یک از زاویه‌های زیر را روی دایره‌های مثلثاتی داده شده، نشان دهید.

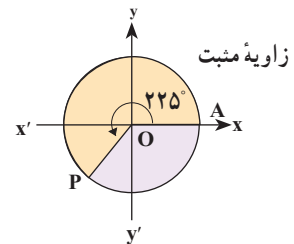
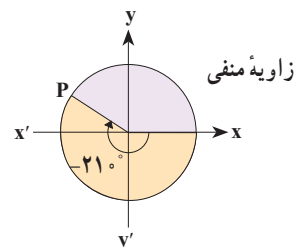
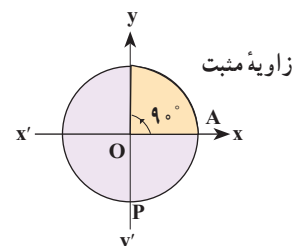
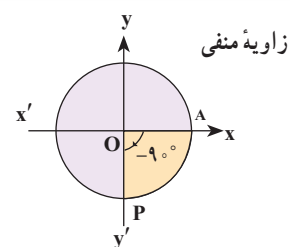


۲ فرض کنید $P(x, y)$ نقطه‌ای دلخواه روی دایره مثلثاتی روبه‌رو باشد و θ زاویه‌ای است که نیم خط $\vec{OP}$ با محور $\vec{Ox}$ می‌سازد. از نقطه P خطی بر محور $\vec{Ox}$ عمود می‌کنیم و محل برخورد را Q می‌نامیم. الف) در مثلث OPQ، نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ را به‌دست آورید.

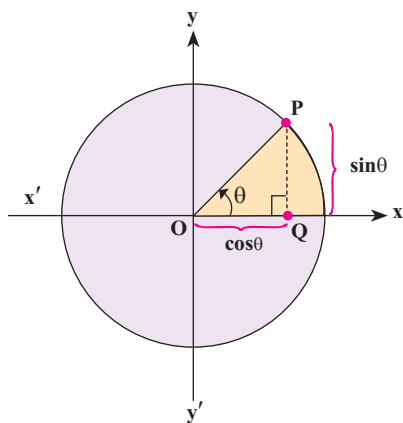
$$\cos \theta = \dots \quad \text{و} \quad \sin \theta = \dots \quad \text{و} \quad \tan \theta = \dots$$



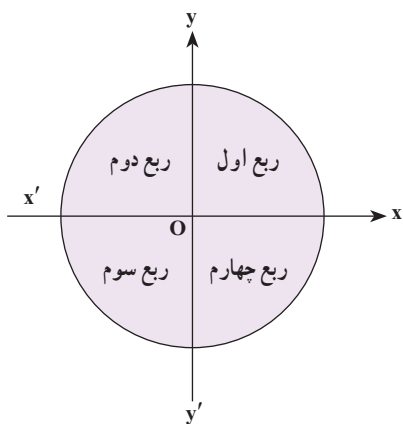
می‌توان از دایره مثلثاتی برای بیان مکان، زمان و توصیف بسیاری از حرکات همانند چرخش، حرکت دورانی، حرکات دوره‌ای، حرکات تناوبی و حرکات رفت و برگشتی در یک مسیر مشخص، استفاده کرد. یکی از این کاربردها، استفاده در سیستم رادارهاست.



ب) با توجه به قسمت (الف) می‌توان دید فاصله Q تا مبدأ با برابر است و فاصله نقطه P تا پای عمود، یعنی نقطه Q با برابر است.



با توجه به قسمت (ب) محور $x'ox$ یا محور x ها را محور کسینوس ها و محور $y'oy$ یا محور y ها را محور سینوس ها می‌نامیم. به عبارت دیگر، اگر نقطه دلخواهی روی دایره مثلثاتی باشد که نیم خط OP با قسمت مثبت محور x زاویه θ می‌سازد، آنگاه P نقطه‌ای با مختصات (x, y) است که در آن $x = \cos \theta$ و $y = \sin \theta$.



نکته: دو محور عمود بر هم $x'ox$ و $y'oy$ صفحه را به چهار قسمت تقسیم می‌کنند. هر یک از این قسمت‌ها را یک ناحیه یا یک ربع مثلثاتی می‌نامیم. با توجه به جهت دایره مثلثاتی، ناحیه xoy را ربع اول، ناحیه $x'oy$ را ربع دوم، ناحیه $x'oy'$ را ربع سوم و ناحیه xoy' را ربع چهارم مثلثاتی می‌نامیم.

نکته: زاویه‌های 0° ، 9° ، 18° ، 27° و 36° زوایای مرزی هستند و آنها را در هیچ کدام از ناحیه‌های فوق در نظر نمی‌گیریم.

کار در کلاس

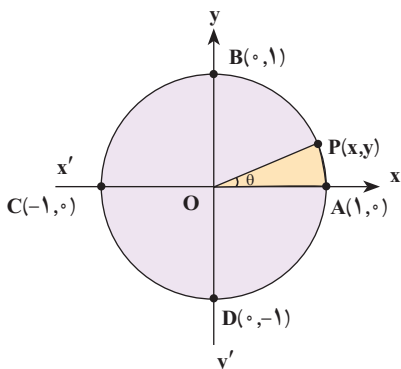
۱ مشخص کنید انتهای کمان مربوط به هر یک از زاویه‌های زیر در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می‌گیرد؟

الف) -3° ب) 65° پ) 182° ت) -95°

۲ با توجه به آنچه در فعالیت قبل، به دست آوردید، توضیح دهید که اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ای در ربع اول باشد (زاویه در ربع اول باشد)، آنگاه چرا نسبت‌های مثلثاتی آن زاویه، همگی مثبت‌اند؟

مثال

می‌خواهیم نسبت‌های مثلثاتی زاویه $^\circ$ را به دست آوریم. می‌دانیم در دایره مثلثاتی روبه‌رو، $\sin \theta = y$ و $\cos \theta = x$. اگر $\theta = 0^\circ$ ، آنگاه نقطه P روی نقطه A قرار می‌گیرد و داریم $\sin 0^\circ = 0$ ، همچنین $\cos 0^\circ = 1$ و $\frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$ ، اما $\cot 0^\circ$ تعریف نمی‌شود (چرا؟).

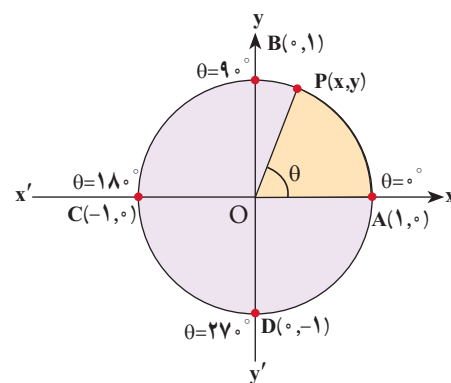


فعالیت

۱ در دایره مثلثاتی روبه‌رو اگر $\theta = 9^\circ$ ، نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کنید.

۲ اگر $\theta = 18^\circ$ ، نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کنید.

۳ اگر $\theta = 27^\circ$ ، نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کنید.



کار در کلاس

با توجه به نتایج بالا جدول زیر را کامل کنید :

مقدار	$^\circ$	9°	?	27°	36°
$\sin\theta$	$^\circ$		$^\circ$	-1	$^\circ$
$\cos\theta$			-1		
$\tan\theta$		تعریف نشده	$^\circ$		
$\cot\theta$			تعریف نشده		

$0^\circ < \alpha < 9^\circ \Rightarrow \alpha$ در ربع اول است

$9^\circ < \alpha < 18^\circ \Rightarrow \alpha$ در ربع دوم است

$18^\circ < \alpha < 27^\circ \Rightarrow \alpha$ در ربع سوم است

$27^\circ < \alpha < 36^\circ \Rightarrow \alpha$ در ربع چهارم است

فعالیت

۱ فرض کنید θ زاویه‌ای در ربع سوم دایره مثلثاتی باشد. با توجه به اینکه $x = \cos\theta$ و $y = \sin\theta$

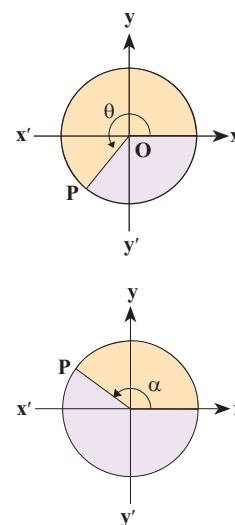
و در ربع سوم، $x, y < 0$ ، علامت هر یک از نسبت‌های مثلثاتی θ را در ربع سوم مشخص کنید.

۲ فرض کنید α زاویه‌ای در دایره مثلثاتی در ربع دوم باشد. فعالیت قبل را برای α نیز

تکرار کنید.

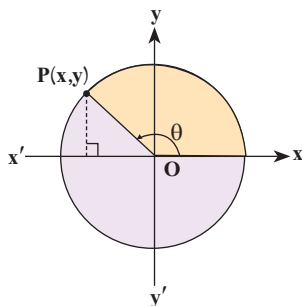
۳ جدول زیر را کامل کنید :

مقدار	ربع اول $x, y > 0$	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
$\sin\theta$	+			
$\cos\theta$		-		
$\tan\theta$			+	
$\cot\theta$				-



نکته: برای هر زاویه دلخواه θ ،

$$-1 \leq \sin\theta \leq 1 \text{ و } -1 \leq \cos\theta \leq 1.$$



آقای جلالی، از دانش آموزان پرسید: اگر زاویه‌ای در ربع دوم مثلثاتی باشد و $\sin \theta = \frac{5}{7}$ ،

آیا می‌توان سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کرد؟

امین: می‌دانیم $\sin \theta = y = \frac{5}{7}$ ، بنابراین P نقطه‌ای به عرض است.

معلم: درست است و حالا طول نقطه P چگونه به دست می‌آید؟

امیرعلی: طبق رابطه فیثاغورس، در مثلث قائم‌الزاویه داریم: $x^2 + y^2 = 1$. بنابراین و در

نتیجه $x^2 = \frac{24}{49}$. پس داریم $x = \dots\dots\dots$.

معلم: آفرین، این راه کاملاً درست است، ولی کدام مقدار قابل قبول است؟

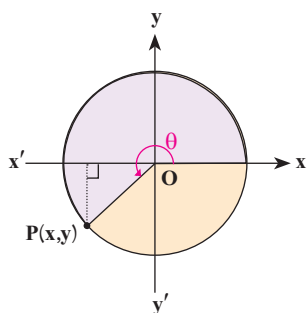
محمد مهدی: چون θ زاویه‌ای در ربع است، پس طول نقطه P منفی است و از

این رو $x = \dots\dots\dots$ قابل قبول است.

معلم: استدلال محمد مهدی کاملاً منطقی است و P نقطه‌ای به مختصات

(..... و) است. در نتیجه:

$$\cot \theta = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}, \quad \cos \theta = x = \dots\dots\dots$$



۱ فرض کنید نقطه P روی دایره مثلثاتی قرار دارد به طوری که $\cos \theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$. می‌دانیم

θ در ربع سوم مثلثاتی قرار دارد، بنابراین $y = \sin \theta = \dots\dots\dots$.

الف) مختصات نقطه P را به دست آورید.

ب) سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ را به دست آورید.

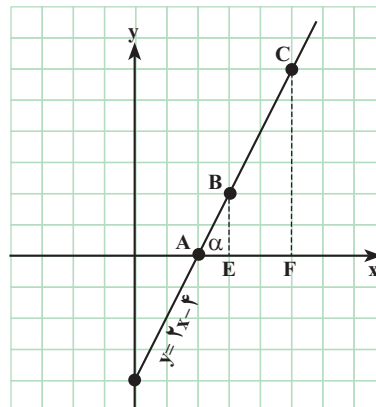
۲ اگر $\cos \alpha = \frac{-2}{5}$ ، آنگاه در مورد ناحیه‌ای که α در آن قرار می‌گیرد، بحث کنید.

۳ زاویه‌ای مثال بزنید که سینوس آن منفی و کسینوس آن مثبت باشد.

رابطه شیب خط با تانژانت زاویه

فعالیت

نمودار خط $y=2x-4$ در شکل روبه‌رو رسم شده است. دو نقطه B و C روی این خط را در نظر بگیرید و خطی از آنها به محور x ها عمود کنید. پای عمودها را به ترتیب E و F بنامید. الف) تانژانت زاویه α را به دست آورید.



ب) شیب این خط را پیدا کنید.

$$\text{شیب خط} = \frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}} = \dots\dots\dots$$

پ) از مقایسه قسمت الف) و ب) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ توضیح دهید.

شیب هر خط که محور افقی را قطع می‌کند، برابر است با تانژانت زاویه بین آن خط و جهت مثبت محور افقی. به عبارت دیگر، اگر α زاویه‌ای باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می‌سازد، آنگاه:

$$\text{شیب خط} = \tan \alpha$$

کار در کلاس

۱) مراحل فعالیت بالا را برای خط‌های زیر، تکرار کنید.

ب) $x+y=2$

الف) $2y-3x=5$

۲) معادله خطی را بنویسید که زاویه آن با جهت مثبت محور x ها 30° است و از نقطه $(1,0)$ می‌گذرد.

تمرین

۱) هر یک از زاویه‌های زیر را روی دایره مثلثاتی رسم کنید، سپس مشخص کنید در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می‌گیرد.

ت) 185°

ب) -135°

ب) 225°

الف) 27°

در اخترشناسی، اغلب به مسئله‌هایی برمی‌خوریم که برای حل آنها به مثلثات نیازمندیم. ساده‌ترین این مسئله‌ها، پیدا کردن یک کمان دایره برحسب درجه است. پیدایش مثلثات براساس روابط بین کمان‌ها و وترها بوده است. کهن‌ترین جدولی که به ما رسیده است و در آن طول وترهای برخی کمان‌ها داده شده است متعلق به هیپارک، اخترشناس سده دوم میلادی است و شاید بتوان تنظیم این جدول را نخستین گام در راه پیدایش مثلثات دانست. همه کارهای ریاضی‌دانان و اخترشناسان یونانی در درون هندسه انجام گرفت و هرگز به مفهوم‌های اصلی مثلثات نرسیدند. خوارزمی نخستین جدول‌های سینوسی را تنظیم کرد و پس از او همه ریاضی‌دانان ایرانی گام‌هایی در جهت تکمیل این جدول‌ها و گسترش مفهوم‌های مثلثاتی برداشتند. روزی جدول سینوس‌ها را تقریباً 30° درجه به 3° درجه تنظیم کرد و برای نخستین بار به دلیل نیازهای اخترشناسی مفهوم تانژانت را تعریف کرد. جدی‌ترین تلاش‌ها به‌وسیله ابوریحان بیرونی و ابوالوفای بوزجانی انجام گرفت و سرانجام خواجه‌نصیرالدین طوسی با جمع‌بندی کارهای دانشمندان ایرانی پیش از خود، نخستین کتاب مستقل مثلثات را نوشت. بعد از طوسی، جمشید کاشانی ریاضی‌دان ایرانی با استفاده از روش زیبایی که برای حل معادله درجه سوم پیدا کرده بود، توانست راهی را برای محاسبه سینوس کمان یک درجه، با هر دقت دلخواه پیدا کند. پیشرفت بعدی دانش مثلثات از سده پانزدهم میلادی و در اروپای غربی انجام گرفت.

۲ در هر یک از موارد زیر، نسبت مثلثاتی زاویه‌ای داده شده است. سایر نسبت‌های مثلثاتی را به دست آورید.

الف) $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ (در ربع چهارم)

ب) $\sin \beta = \frac{-1}{4}$ (در ربع سوم)

۳ اگر $\sin \theta$ و $\tan \theta$ هم علامت باشند، آنگاه θ در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟

۴ حدود زاویه θ را در هر یک از حالات زیر مشخص کنید.

الف) $\sin \theta > 0$, $\cos \theta > 0$ ب) $\sin \theta < 0$, $\cos \theta > 0$

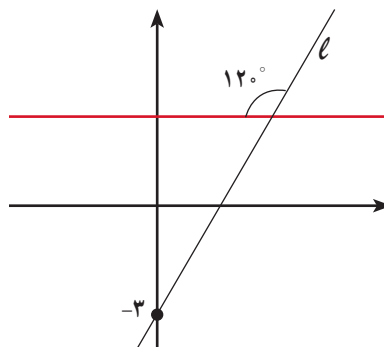
۵ اگر $\sin \alpha \times \cos \alpha < 0$ ، آنگاه α در کدام یک از نواحی چهارگانه می‌تواند قرار بگیرد؟ چرا؟

۶ زاویه‌ای مثل α پیدا کنید به‌طوری که $\tan \alpha > \cot \alpha$. اکنون زاویه‌ای مثل β پیدا کنید، به‌طوری که $\cot \beta > \tan \beta$. از این تمرین چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۷ در تمرین ۶ به جای تانژانت و کتانژانت به ترتیب سینوس و کسینوس قرار دهید و در مورد آن بحث کنید.

۸ معادله خطی را بنویسید که زاویه آن با جهت مثبت محور x ها 45° است و نقطه $(2, 0)$ روی آن قرار دارد.

۹ با توجه به شکل زیر، معادله خط ℓ را به دست آورید.



درس سوم: روابط بین نسبت های مثلثاتی

در درس های قبل با نسبت های مثلثاتی و دایره مثلثاتی آشنا شدید. در این درس روابطی بین این نسبت ها و کاربردهایی از آنها را بیان می کنیم.

فعالیت

مثلث قائم الزاویه ABC را در نظر بگیرید.

الف اندازه وتر یعنی x را بیابید و سپس مقدار عددی هر یک از چهار نسبت مثلثاتی را برای زاویه θ و α به دست آورید.

$$\sin \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}$$

$$\cos \theta = \dots\dots\dots$$

$$\tan \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \dots$$

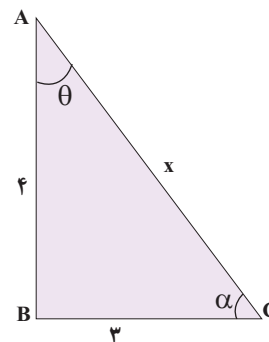
$$\cot \theta = \frac{1}{\dots\dots\dots} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \dots\dots\dots$$

$$\sin \alpha = \dots\dots\dots$$

$$\cos \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{AB}{BC} = \dots\dots\dots$$

$$\cot \alpha = \dots\dots\dots$$



ب با توجه به مقادیر عددی حاصل در قسمت (الف) مقدار $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ و $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$ را به دست آورید.

$$\sin \theta \times \sin \theta = (\sin \theta)^2 = \sin^2 \theta$$

پ درستی رابطه $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ را با استفاده از تعریف و اضلاع مثلث، بررسی کنید.

$$(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{BC^2 + AB^2}{AC^2} = \dots\dots\dots$$

ت مشابه قسمت (پ) درستی رابطه $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ را بررسی کنید.

اگر α زاویه دلخواهی باشد، همواره داریم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

کار در کلاس

با توجه به رابطه بالا، یعنی $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ جاهای خالی را پر کنید:

الف) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = \dots \Rightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{\dots}$

ب) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \dots \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{\dots}$

تذکر: در رابطه هایی که به دست آوردید، علامت نسبت مثلثاتی زاویه α ، با توجه به ناحیه ای که زاویه α در آن قرار دارد، تعیین می شود.

مثال

اگر α زاویه ای در ناحیه سوم مثلثاتی باشد و $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ ، آنگاه مقدار $\tan \alpha$ ، $\cos \alpha$ و $\cot \alpha$ را به دست آورید.

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \xrightarrow{\alpha \text{ در ناحیه سوم}} \cos \alpha = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

کار در کلاس

رابطه های تانژانت بر حسب کسینوس و کتانژانت بر حسب سینوس

در این قسمت رابطه ای برای تانژانت بر حسب کسینوس یک زاویه و همچنین رابطه ای برای کتانژانت بر حسب سینوس، به دست می آوریم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (\cos \alpha \neq 0)$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \dots = \dots$$

$$\Rightarrow 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (\sin \alpha \neq 0)$$

۳ اگر $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ و $\tan \alpha = \frac{-3}{4}$ ، آنگاه سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه α را به دست آورید.

اتحاد مثلثاتی

هر یک از تساوی‌های $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ، $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$ ($\cos \alpha \neq 0$)، $\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha$ ($\sin \alpha \neq 0$) را که به ازای هر α همواره برقرار است، یک اتحاد مثلثاتی می‌نامیم.

هرگاه بخواهیم ثابت کنیم بین دو عبارت مثلثاتی یک تساوی (اتحاد) برقرار است، می‌توانیم یک طرف تساوی را بنویسیم و با توجه به روابط بین نسبت‌های مثلثاتی به طرف دیگر برسیم.

به مثال زیر توجه کنید :



ساعت آفتابی وسیله‌ای است که زمان را با استفاده از مکان خورشید در آسمان می‌سنجد و از میله‌ای ساخته شده است که روی صفحه‌ای قرار دارد و ساعت‌های شبانه‌روز، روی صفحه نشانه‌گذاری شده‌اند. وقتی مکان خورشید در آسمان عوض می‌شود، مکان سایه میله هم روی صفحه جابه‌جا می‌شود و ساعت را نشان می‌دهد.

مثال

درستی اتحاد مثلثاتی زیر را بررسی کنید.

$$\left(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta\right)(1 - \sin \theta) = \cos \theta$$

$$(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta) \stackrel{\text{اتحاد مزدوج}}{=} 1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$$

حل :

$$\begin{aligned} \text{طرف چپ} &= \left(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta\right)(1 - \sin \theta) = \left(\frac{1}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)(1 - \sin \theta) \\ &= \left(\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}\right)(1 - \sin \theta) = \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta} = \cos \theta = \text{طرف راست} \end{aligned}$$

کار در کلاس

۱ با فرض بامعنی بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید :

الف) $\sin^4 \theta - \cos^4 \theta = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta$

طرف چپ $= \sin^4 \theta - \cos^4 \theta \stackrel{\text{اتحاد مزدوج}}{=} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \times (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \dots\dots$

$$\text{ب) } \frac{1}{\cos \alpha} + \cot \alpha = \frac{\tan \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\text{طرف راست} = \frac{\tan \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\tan \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\sin \alpha} + \dots = \dots + \dots$$

۲ کدام یک از تساوی‌های زیر یک اتحاد است؟ چرا؟

الف) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha$

ب) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

۳ با ضرب کردن طرفین اتحاد مثلثاتی $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ در $\cot \alpha$ یک اتحاد مثلثاتی بسازید؛ سپس درستی آن را اثبات کنید.

تمرین

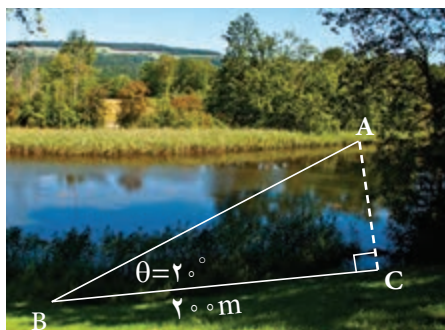
۱ فرض کنید α زاویه‌ای در ناحیه دوم مثلثاتی باشد و $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$. نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه α را به دست آورید.

۲ اگر $\tan \alpha = \frac{-4}{3}$ و α زاویه‌ای در ناحیه چهارم مثلثاتی باشد، نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه α را به دست آورید.

۳ اگر $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه 135° را به دست آورید.

۴ اگر $\tan 24^\circ = \sqrt{3}$ ، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه 24° را به دست آورید.

۵ شخصی می‌خواهد عرض یک رودخانه را اندازه‌گیری کند. او ابتدا مطابق شکل، نقطه‌ای چون C و سپس نقطه‌ای مانند A را در امتداد و در طرف دیگر رودخانه مشخص می‌کند و به اندازه 20° متر از C به صورت افقی در امتداد رودخانه حرکت می‌کند تا به نقطه B برسد. اگر زاویه دید این شخص (از نقطه B به نقطه A)، 20° باشد و $\sin 20^\circ \approx 0.34$ ، او چگونه می‌تواند عرض رودخانه را محاسبه کند؟ (پاسخ خود را تا دو رقم اعشار بر حسب متر بنویسید.)



۶ با فرض بامعنی بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

$$\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \times \tan \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad (\text{الف})$$

$$1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \sin x \quad (\text{ت})$$

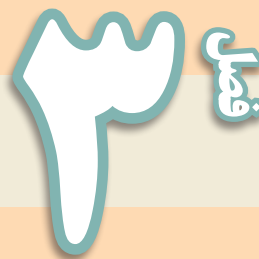
$$\frac{1 + \tan \alpha}{1 + \cot \alpha} = \tan \alpha \quad (\text{پ})$$

$$\frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{\cos x}{1 + \sin x} \quad (\text{ث})$$



اولین دانشمندی که جدول سینوس، کسینوس، شعاع دایره‌ای و نسبت مثلثاتی را کشف کرد، ابوالوفا محمد بن یحیی بن اسماعیل بن عباس بوزجانی خراسانی است. وی یکی از مفاخر علمی ایران، ریاضی‌دان و اخترشناس سده چهارم هجری قمری در اول رمضان ۳۲۸ (ه.ق) در بوزجان (تربت جام امروزی)، در مرز خراسان و افغانستان زاده شد. او مقدمات ریاضیات زمان را، همان‌جا، نزد دایی و عمویش فرا گرفت. در سن ۲۰ سالگی به بغداد رفت و نزد اساتید مختلفی به تحصیل خود ادامه داد. وی پس از مدتی به یکی از دانشمندان مشهور زمان خود تبدیل شد و با دانشمندان هم عصر خود، مکاتبات علمی داشت. به عنوان مثال، وقتی ابوریحان در خوارزم بود، برای رصد همزمان گرفتگی ماه، با بوزجانی که در بغداد بود، قرار گذاشتند تا نتیجه دو رصد که در دو نقطه مختلف انجام می‌گرفت را با هم مقایسه کنند. ابوالوفا بر بسیاری از آثار پیشینیان (ایرانی و یونانی) مثل «مقدمات» اقلیدس، «جبر و مقابله» خوارزمی، «جبر» دیوفانت، «مجسطی» بطلمیوس و غیره تفسیر نوشت. خود نیز ابتکارات و نوآوری‌های بسیاری در هندسه و مثلثات دارد. سرانجام وی در سوم رجب ۳۸۸ (ه.ق) در بغداد درگذشت.

توان‌های گویا و عبارت‌های جبری



پژوهشگاه رویان هشتم خرداد ماه سال ۱۳۷۰ با عنوان مرکز جراحی محدود با هدف ارائه خدمات درمانی به زوج‌های نابارور و پژوهش و آموزش در زمینه علوم باروری و ناباروری توسط زنده یاد دکتر سعید کاظمی آشتیانی و گروهی از پژوهشگران و همکارانش در جهاد دانشگاهی علوم پزشکی ایران تأسیس شد. در حال حاضر این پژوهشگاه فعالیت‌های پژوهشی خود را در سه پژوهشکده پزشکی تولیدمثل، سلول‌های بنیادی و زیست فناوری دنبال می‌کند و در دو مرکز درمان ناباروری و سلول‌درمانی نیز به بیماران خدمات ارائه می‌کند.

درس اول ریشه و توان

درس دوم ریشه n ام

درس سوم توان‌های گویا

درس چهارم عبارت‌های جبری



درس اول: ریشه و توان

در سال گذشته با ریشه‌های دوم و سوم عددها آشنا شده‌اید. ریشه و توان رابطه‌ای دو سویه با هم دارند. به عنوان مثال $\sqrt[3]{8} = 2 \Rightarrow 2^3 = 8$ ؛ همچنین $2^3 = 8 \Rightarrow \sqrt[3]{8} = 2$. علامت $\Rightarrow$ به این معنی است که طرف چپ، طرف راست را نتیجه می‌دهد. اگر طرف راست هم طرف چپ را نتیجه دهد، می‌توان هر دو نتیجه را به طور خلاصه با علامت $\Leftrightarrow$ نوشت. بنابراین می‌توانیم بنویسیم $2^3 = 8 \Leftrightarrow \sqrt[3]{8} = 2$.

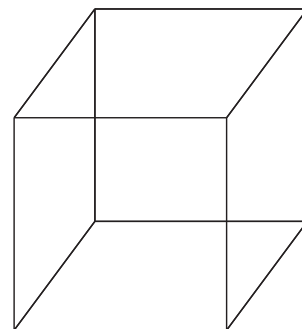
فعالیت

اکنون با هر تساوی توانی یک تساوی رادیکالی بنویسید. همچنین نظیر هر تساوی رادیکالی یک تساوی توانی بنویسید؛ مانند نمونه‌ها

$$\begin{array}{ll} (-3)^3 = -27 \Leftrightarrow \sqrt[3]{-27} = -3 & \sqrt{81} = 9 \Leftrightarrow 9^2 = 81 \\ (-5)^3 = -125 \Leftrightarrow & \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow \\ (0/25)^2 = 0/625 \Leftrightarrow & \sqrt[3]{-8} = -2 \Leftrightarrow \\ (0/5)^2 = 0/25 \Leftrightarrow & \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow \end{array}$$

کار در کلاس

۱ حجم مخزن آبی که به شکل مکعب است، برابر ۲۵ متر مکعب است. طول ضلع این مکعب را حدس بزنید و حدس خود را آزمایش کنید. می‌دانیم هرگاه طول ضلع مکعب a متر باشد، حجم آن برابر a^3 متر مکعب است. ابتدا جدول را کامل کنید.



طول ضلع	۱	۲		۴		۶
حجم مکعب	۱	۸	۲۷		۱۲۵	

دو دانش آموز طول ضلع مکعب را به روش های روبه رو به دست آورده اند :
روش های این دو دانش آموز را توضیح دهید.

دبیر: طول ضلع مکعبی عددی بین ۲ و ۳ است. تعداد ارقام اعشاری این عدد بی شمار و دارای دوره تناوب نیست. تقریب این عدد تا یک رقم اعشار برابر با $\frac{2}{9}$ و تا دو رقم اعشار برابر $\frac{2}{92}$ می باشد. چنانچه بخواهیم این عدد را به طور دقیق نمایش دهیم از $\sqrt[3]{25}$ استفاده می کنیم که همان ریشه سوم ۲۵ است.

$$\sqrt[3]{25} \approx 2/9$$

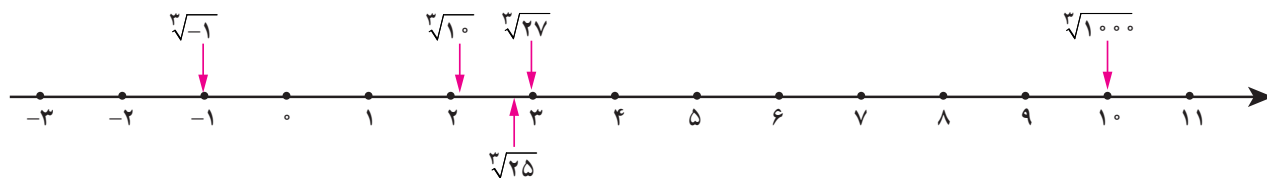
احمد: مقدار دقیق $\sqrt[3]{25}$ چقدر است؟

دبیر: $\sqrt[3]{25}$ یک عدد حقیقی گنگ است. با ماشین حساب، می توانید تقریب دقیق تری از آن به دست آورید، اما هیچ گاه مقدار دقیق آن به صورت اعشاری قابل نمایش نیست و برای نمایش آن از نماد $\sqrt[3]{25}$ استفاده می کنیم.

اگر قدرت ماشین حساب شما بیشتر باشد، تعداد ارقام اعشاری بیشتری به دست می دهد و عدد دقیق تری برای ریشه سوم ۲۵ حاصل می شود.

$\sqrt[3]{25}$ برای نمایش ریشه سوم ۲۵ به کار می رود، اما در کاربردهای دنیای واقعی با مقادیر تقریبی آن مانند $\frac{2}{9}$ ، $\frac{2}{92}$ و $\frac{2}{924}$ کار می کنیم.

ریشه عددها را می توانیم به طور تقریبی روی محور اعداد نشان دهیم.



مانند نمونه با استدلال مشخص کنید که هر ریشه بین کدام دو عدد صحیح متوالی است :

الف) چون $3^3 < 25 < 4^3$ پس $3 < \sqrt[3]{25} < 4$. همچنین چون $1 < 5 < 8$ پس $1 < \sqrt[3]{5} < 2$.

ت) $\square < \sqrt[3]{20} < \square$

پ) $\square < \sqrt[3]{-17} < \square$

ب) $\square < \sqrt[3]{10} < \square$

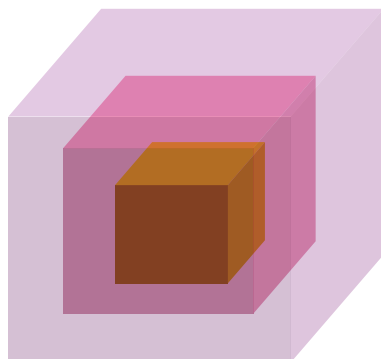
۳ مقدار تقریبی یا دقیق ریشه‌ها را محاسبه کنید و مانند نمونه روی محور اعداد، نشان دهید (می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید).

$$\sqrt[3]{1} \qquad \sqrt[3]{3} \approx 1/4 \qquad \sqrt[3]{4} \approx \qquad \sqrt[3]{125} = \qquad \sqrt[3]{-9} =$$



۴ زیر رادیکال (جای خالی) عدد یا عددی بگذارید که نامساوی‌ها برقرار باشند.

الف) $4 < \sqrt{\quad} < 5$ ب) $9 < \sqrt[3]{\quad} < 10$



۵ سه مکعب تو در تو مانند شکل مقابل واقع شده‌اند. حجم مکعب بیرونی (بزرگ) برابر ۶۴

و حجم مکعب داخلی (کوچک) ۲۷ است. طول ضلع مکعب میانی چه عددی می‌تواند باشد؟ (حداقل سه پاسخ متفاوت ارائه کنید.)

فعالیت

۱ مانند ریشه‌های دوم و سوم می‌توان ریشه چهارم را تعریف کرد. با هر تساوی توانی یک تساوی رادیکالی داریم:

$$\begin{array}{lcl} 2^4 = 16 & \Rightarrow & \text{ریشه‌های چهارم} \\ (-2)^4 = 16 & \Rightarrow & \text{ریشه‌های چهارم} \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 \\ -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} 5^4 = 625 & \Rightarrow & \text{ریشه‌های چهارم} \\ (-5)^4 = 625 & \Rightarrow & \text{ریشه‌های چهارم} \end{array} \quad \begin{array}{l} 5 \\ -5 \end{array}$$

آیا ۱۶ ریشه چهارم دارد؟ آیا عددی منفی یا مثبت وجود دارد که وقتی به توان ۴ برسد، برابر ۱۶ شود؟ اکنون عبارت را کامل کنید.

هر عدد مثبت دارای ریشه چهارم است که یکدیگرند.
عددهای منفی ریشه چهارم ندارند.

۱ جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید. آخرین ستون را به دلخواه کامل کنید.

عدد	۱۶	۶۲۵	۱۰,۰۰۰	۳۱۲۵					
ریشه های چهارم	۲	-۲	۵	-۵			$5\sqrt[4]{5}$		

۲ جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید.

عدد	-۳۲		-۲۴۳			
ریشه پنجم	-۲	۵		-۱	-۱۰	

۳ ریشه پنجم چه عددهایی با خودشان برابر است؟

۴ محاسبه کنید.

$$\sqrt[5]{\frac{1}{1000000}} =$$

$$\sqrt[5]{-0/00032} =$$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{32}} =$$

۵ عبارت را کامل کنید.

هر عدد مثبت یا منفی دارای ریشه پنجم است. اگر عدد مثبت باشد، ریشه پنجم آن مثبت و اگر عدد منفی باشد ریشه پنجم آن است.

تمرین

۱ برای هر عدد رادیکالی زیر، اگر حاصل آن یک عدد صحیح است، جواب را بنویسید و در غیر این صورت دو عدد صحیح متوالی بنویسید که عدد رادیکالی مورد نظر بین آنها باشد.

$$\sqrt{16}$$

$$\sqrt{20}$$

$$\sqrt[4]{400}$$

$$\sqrt{75}$$

$$\sqrt[3]{-10}$$

$$\sqrt[5]{400}$$

$$\sqrt[3]{-9}$$

$$\sqrt[3]{250}$$

$$\sqrt[5]{1}$$

$$\sqrt[3]{20}$$

۲ مقدار تقریبی هر کدام از اعداد رادیکالی زیر را با یک رقم اعشار مشخص کنید (می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید).

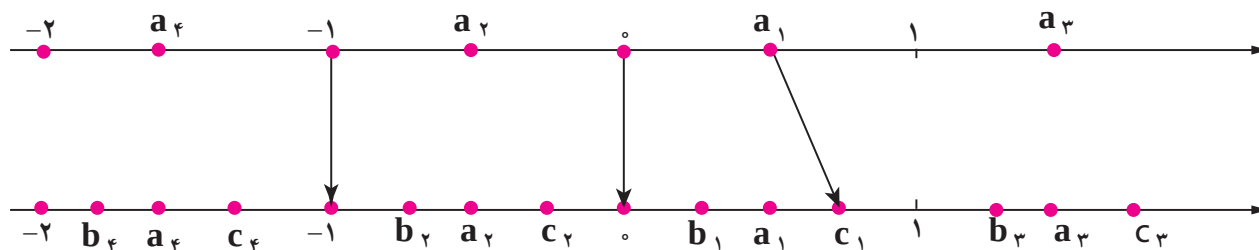
$$\sqrt{10}$$

$$\sqrt[3]{7/25}$$

$$\sqrt[5]{16}$$

$$\sqrt[5]{64}$$

۳ مانند نمونه در شکل زیر، هر یک از نقاط مشخص شده روی محور بالا را به یکی از نقاط مشخص شده روی محور پایین که متناظر با ریشه سوم آن عدد است، وصل کنید (یک مثال عددی از هر مورد ارائه کنید).



۴ با توجه به آنچه درباره ریشه سوم اعداد درک کرده‌اید، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

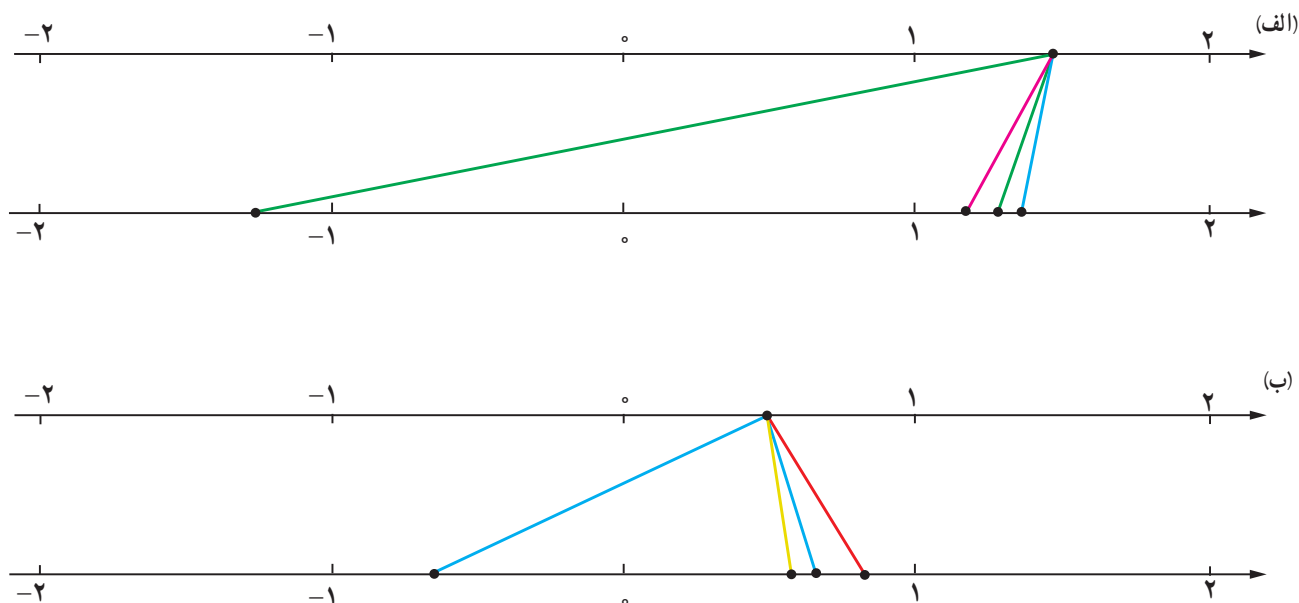
الف) a عددی مثبت است و $\sqrt[3]{a} > a$. چه عددی می‌تواند باشد؟

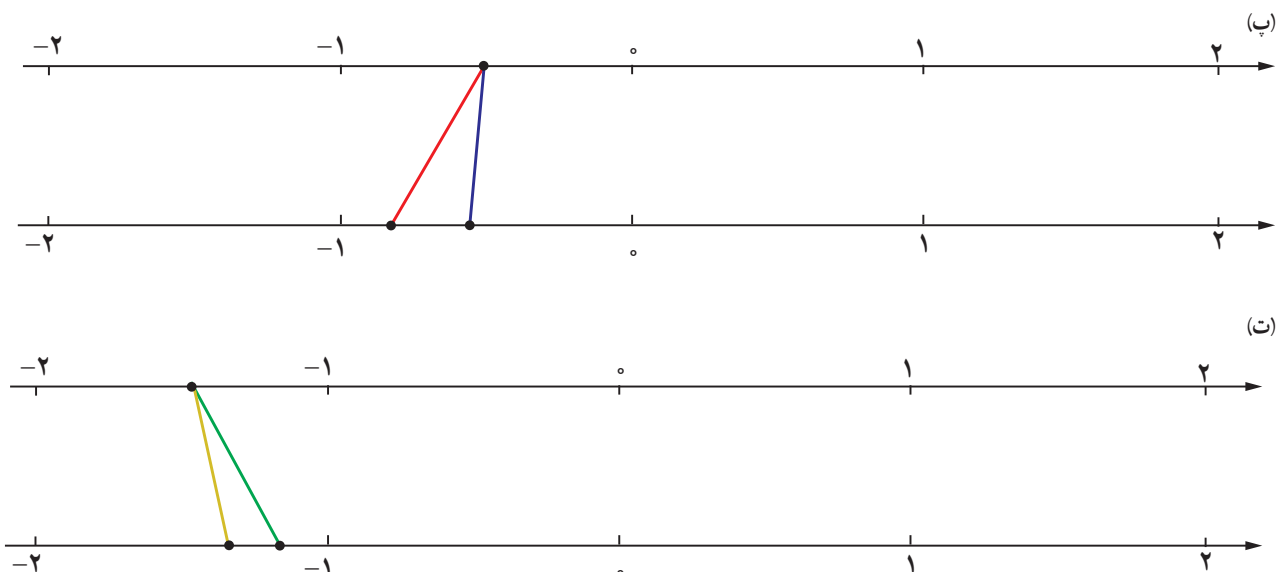
ب) a عددی است که ریشه سوم آن با خودش برابر است؛ یعنی $\sqrt[3]{a} = a$. چه اعدادی می‌تواند باشد؟

پ) a عددی مثبت است و $\sqrt[3]{a} < a$. چه اعدادی می‌تواند باشد؟

ت) به موارد (الف) و (پ) برای حالتی که a عددی منفی باشد، نیز پاسخ دهید.

۵ در هر یک از شکل‌های زیر، نقطه‌ای از محور بالا به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است. مشخص کنید هر رنگ مربوط به کدام ریشه است.





۶ جاهای خالی را پر کنید.

الف) اعداد ۳ و ریشه‌های چهارم عدد می‌باشند.

ب) اگر $a = \sqrt[4]{16}$ باشد، در این صورت حاصل عبارت $a^3 + 5$ برابر است با

۷ در جاهای خالی یکی از علامت‌های «>»، «<»، «=» را قرار دهید.

$$(-\frac{1}{10})^5 \bigcirc (-\frac{1}{10})^3$$

$$(\frac{1}{10})^5 \bigcirc (\frac{1}{10})^3$$

$$(-2)^5 \bigcirc (-2)^4$$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{100000}} \bigcirc \frac{1}{10}$$

خوانندگی



حنا - نخستین بزغاله
نمیه‌سازی شده خاورمیانه



پایانا - نخستین گوساله
نمیه‌سازی شده خاورمیانه

سلول، واحد تشکیل دهنده بافت‌های بدن است. هر بافت سلول‌های ویژه خود را دارد که در صورت تکثیر، فقط می‌تواند به سلول‌های همان بافت تبدیل شود، ولی سلول بنیادی مادر تمام سلول‌ها است و توانایی تبدیل شدن به تمام سلول‌های بدن را دارد. دانشمندان می‌گویند این سلول‌ها می‌توانند امکان معالجه بیماری‌هایی را فراهم آورند که در حال حاضر فقط درمان‌های محدودی برای آنها وجود دارد. به دلیل توانایی منحصر به فرد سلول‌های بنیادی، پژوهش در مورد آنها امروزه از مباحث جذاب در زیست‌شناسی و پزشکی است. این سلول‌ها همچنین قدرت تکثیر فراوانی دارند و سلامت آنها سبب سلامت بدن می‌شود. پیشرفت در زمینه سلول‌های بنیادی تنها متکی بر علم پزشکی نخواهد بود، بلکه کمک علوم دیگری مانند پلیمر، شیمی، فیزیک و ریاضی هم لازم خواهد بود. دانشمندان ایرانی در زمینه سلول‌های بنیادی پیشرفت‌های چشمگیری داشته‌اند. ایران در زمینه فناوری و تحقیقات سلول‌های بنیادی یکی از ۱۰ کشور برتر جهان محسوب می‌شود.

درس دوم: ریشه n ام

فعالیت

۱ مشابه آنچه که برای ریشه‌های دوم، سوم، چهارم و پنجم گفته شد، می‌توان برای ریشه‌های دیگر مثلاً ریشه ششم نیز عمل کرد. جدول زیر را که مربوط به ریشه‌های مختلف عدد ۶۴ است، کامل کنید.

ریشه‌های دوم	ریشه سوم	ریشه‌های چهارم	ریشه پنجم	ریشه‌های ششم	ریشه هفتم	ریشه‌های هشتم
$\sqrt{64} = 8$ و $-\sqrt{64} = -8$		$\sqrt[4]{64}$ و $-\sqrt[4]{64}$	$\sqrt[5]{64}$			

ریشه‌های ششم عدد ۶۴ اعداد $\sqrt[6]{64}$ و $-\sqrt[6]{64}$ یا همان و هستند؛ زیرا $2^6 = 64$ و $(-2)^6 = 64$ (درباره ریشه‌های هفتم و هشتم عدد ۶۴ چه می‌توانید بگویید؟ به طور کلی اگر $n \in \mathbb{N}$ ، درباره ریشه n ام عدد ۶۴ چه می‌توان گفت؟ در حالت کلی اگر a یک عدد مثبت باشد و $n \in \mathbb{N}$ ، درباره تعداد ریشه‌های n ام a چه می‌توان گفت؟

۲ جدول زیر را که درباره ریشه‌های مختلف عدد ۶۴- است، تکمیل کنید.

ریشه دوم	ریشه سوم	ریشه چهارم	ریشه پنجم	ریشه ششم	ریشه هفتم	ریشه هشتم
وجود ندارد	$\sqrt[3]{-64} = -4$	وجود ندارد	$\sqrt[5]{-64}$			

ریشه‌های زوج ۶۴- وجود ندارند؛ زیرا عددی وجود ندارد که به توان برسد و مساوی ۶۴- شود. درباره ریشه‌های n ام ۶۴- ($n \in \mathbb{N}$) بحث کنید.

اگر a یک عدد منفی و $n \in \mathbb{N}$ باشد، درباره ریشه n ام a چه می‌توان گفت؟

اگر $n \geq 2$ یک عدد طبیعی باشد، b را یک ریشه n ام عدد a می‌نامیم. هرگاه $b^n = a$

۳ جدول زیر را کامل کنید.

$a > 0$	n زوج	a دارای دو ریشه نام $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$ است	$a = 81$ $n = 4$	81 دارای دو ریشه چهارم $\sqrt[4]{81} = 3$ و $-\sqrt[4]{81} = -3$ است
	n فرد		$a =$ $n =$	
$a < 0$	n زوج	ریشه نام وجود ندارد	$a =$ $n =$	
	n فرد		$a =$ $n =$	

۴ در پایه نهم دیدید که :

برای هر دو عدد مثبت a و b : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$
 آیا رابطه بالا درباره $\sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{b}$ نیز برقرار می باشد؟ مثال بزنید.
 با توجه به اینکه 4 یک عدد زوج است، باید a و b باشند.

$$\sqrt[4]{16} \times \sqrt[4]{81} = 2 \times 3 = \dots\dots\dots$$

$$\sqrt[4]{16} \times \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{\dots\dots\dots} = 6$$

درباره $\sqrt[5]{a} \times \sqrt[5]{b} = \sqrt[5]{ab}$ چه می توان گفت؟آیا a و b حتماً باید نامنفی باشند؟ مثالی از a و b نامنفی و مثالی از a و b منفی ارائه کنید و نشان دهید تساوی همواره برقرار است.

کار در کلاس

۱ حاصل هر عبارت را به دست آورید :

$$\sqrt[7]{128} =$$

$$\sqrt[4]{256} =$$

$$\sqrt[9]{-1} =$$

$$\sqrt[4]{625} =$$

$$-\sqrt[4]{0.0016} =$$

$$\sqrt[5]{\frac{-1}{32}} =$$

$$\sqrt[7]{-128} =$$

$$\sqrt[6]{0} =$$

۲ با توجه به اینکه

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\begin{aligned} (\sqrt[5]{2})^3 &= \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2} \\ &= \sqrt[5]{2^3} \end{aligned}$$

به‌طور کلی داریم :

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{ab} & a, b \geq 0 \text{ و } n \text{ زوج} \\ \sqrt[n]{ab} & a, b \text{ دلخواه و } n \text{ یک عدد طبیعی فرد} \end{cases}$$

قرارداد : به‌طور کلی این قرارداد را اعمال می‌کنیم :

وقتی می‌نویسیم $\sqrt[n]{a}$ و n را زوج فرض می‌کنیم، a را مثبت یا برابر صفر در نظر می‌گیریم.

بنابراین باید به یاد داشته باشیم که ریشه‌های زوج برای عددهای منفی بی‌معنا هستند. پس هرگاه $\sqrt{x}$ نوشتیم، از آن می‌فهمیم که $x \geq 0$ است. تساوی‌های فوق را می‌توان به‌صورت مقابل نمایش داد :

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

تمرین

درستی رابطه $\sqrt[k]{a^m} = (\sqrt[k]{a})^m$ را با مقداردهی‌های مختلف به m, k و a بررسی کنید (اگر k زوج باشد، a باید مثبت باشد).

فعالیت

۱ جدول زیر را کامل کنید.

$\sqrt[n]{a^n}$	$a \geq 0$	n زوج	$n=4$ $a=2$	$\sqrt[4]{2^4} = 2$ $(2= 2)$
		n فرد	$n=3$ $a=2$	$\sqrt[3]{2^3} =$
	$a < 0$	n زوج	$n=4$ $a=-2$	$\sqrt[4]{(-2)^4} = 2$ $(2= -2)$
		n فرد	$n=3$ $a=-2$	$\sqrt[3]{(-2)^3} =$

$$\sqrt[n]{a^n} = \dots\dots$$

$$\sqrt[n]{a^n} = \dots\dots \begin{cases} \dots \text{ زوج } n \\ \dots \text{ فرد } n \end{cases}$$

اگر $a \geq 0$ از جدول بالا نتیجه می‌گیریم که :
و اگر $a < 0$ آنگاه

۲ جدول زیر را کامل کنید.

$(\sqrt[n]{a})^n$	$a \geq 0$	n زوج $a = 16$	$(\sqrt[4]{16})^4 = 2^4 = 16$
		n فرد $a = 8$	$(\sqrt[3]{8})^3 = 2^3 =$
	$a < 0$	n زوج $a = -16$	تعریف نشده $\rightarrow (\sqrt[4]{-16})^4$
		n فرد $a = -8$	$(\sqrt[3]{-8})^3 =$

$$(\sqrt[n]{a})^n = \dots\dots\dots$$

$$(\sqrt[n]{a})^n = \dots\dots\dots \begin{cases} \dots \text{زوج } n \\ \dots \text{فرد } n \end{cases}$$

اگر $a \geq 0$ آن گاه از جدول بالا نتیجه می گیریم که :
و اگر $a < 0$ آن گاه

کار در کلاس

تساوی زیر به ازای چه مقادیری از a و n برقرار نیست؟

$$\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n$$

تمرین

۱ الف) یکی از علامت های $>$ یا $<$ یا $=$ را در $\square$ قرار دهید.

$$(0/5)^2 \square (0/5)^3$$

$$\sqrt{0/5} \square \sqrt[3]{0/5}$$

$$4^2 \square 4^3$$

$$\sqrt{4} \square \sqrt[3]{4}$$

ب) وقتی $0 < a < 1$ است، یکی از علامت های مقایسه را در $\square$ قرار دهید.

$$a^2 \square a^3$$

$$\sqrt{a} \square \sqrt[3]{a}$$

پ) وقتی $a > 1$ است، یکی از علامت های مقایسه را در $\square$ قرار دهید.

$$a^2 \square a^3$$

$$\sqrt{a} \square \sqrt[3]{a}$$

۲ الف) یکی از علامت های $< = >$ را در $\square$ قرار دهید.

$$(-0/5)^2 \square (-0/5)^3$$

$$(-2)^2 \square (-2)^3$$

$$(-0/5)^3 \square (-0/5)^5$$

$$(-2)^3 \square (-2)^5$$

$$(0/5)^4 \square (-0/5)^2$$

$$(-2)^4 \square (-2)^2$$

۳ با توجه به تعریف ریشه (اگر $\sqrt[n]{a} = b$ آنگاه $b^n = a$)، نشان دهید برای هر عدد a و هر عدد طبیعی n (به شرط با معنا بودن رادیکال) رابطه زیر برقرار است:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

۴ آیا تساوی $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ برقرار است؟ n را برابر ۳، ۴ یا ۵ بگیرید و به جای a و b مقدارهای عددی بدهید.

۵ عددهای زیر را مانند نمونه محاسبه کنید.

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \rightarrow \sqrt[3]{5^{-3}} = \frac{1}{5}$$

$$\sqrt[5]{2^{-5}} = \sqrt[5]{\frac{1}{32}} =$$

$$\sqrt[4]{3^{-4}} =$$

۶ به جای a و b و عدد طبیعی n عددهایی قرار دهید؛ به طوری که:

الف) تساوی $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ برقرار باشد.

ب) تساوی $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ برقرار نباشد.

درس سوم: توان‌های گویا

فعالیت



پدر محمد یک زیست‌شناس است و در یک آزمایشگاه پزشکی کار می‌کند. در آزمایشی یک نوع باکتری کشت داده شده که در شرایط مساعد، جرم این باکتری‌ها در هر ساعت ۲ برابر می‌شود. جرم باکتری‌ها در لحظه شروع ۱ گرم است؛ بنابراین جرم باکتری‌ها پس از یک ساعت ۲ گرم، پس از ۲ ساعت برابر ۴ گرم، و پس از ساعت n برابر 2^n گرم می‌شود:

$$1, 2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^n$$

محمد از پدرش پرسید: «آیا حتماً تا پایان ساعت باید منتظر بمانیم؟ آیا می‌توانیم جرم باکتری‌ها را پس از نیم ساعت محاسبه کنیم؟»

پدرش گفت: تو فکر می‌کنی جرم باکتری‌ها پس از نیم ساعت چقدر می‌شود؟
محمد گفت: حدس می‌زنم جرم آنها $2^{\frac{1}{2}}$ گرم شده باشد. چون نیم همان $\frac{1}{2}$ است.
پدرش گفت: $2^{\frac{1}{2}}$ چقدر است؟

محمد گفت: نمی‌دانم ولی باید بتوانیم مقدار آن را پیدا کنیم.

اگر فرض کنیم در هر نیم ساعت جرم باکتری‌ها b برابر شود، در این صورت بعد از یک ساعت جرم باکتری‌ها باید برابر $b \times b = b^2$ شود. اما می‌دانیم پس از یک ساعت جرم باکتری‌ها دو برابر می‌شوند؛ پس $2 = b^2$ ؛ یعنی $b = \sqrt{2}$ (زیرا b مثبت است).

نتیجه جالبی است! $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$. مشابه این رابطه را می‌توانیم برای توان‌های دیگر نیز تعریف کنیم: $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$ ، $2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$ ؛ همچنین برای عددهای دیگر $\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$. می‌توانیم نماهای کسری با صورت ۱ را تعریف کنیم. a عددی حقیقی و مثبت است.

برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$ ، توان $\frac{1}{n}$ عدد مثبت a را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

اگر $a < 0$ ، $a^{\frac{1}{n}}$ تعریف نمی‌شود. به عنوان مثال عبارت‌هایی مانند $(-1)^{\frac{1}{3}}$ و $(-2)^{\frac{1}{4}}$ تعریف نمی‌شوند. در تمام این فصل، در عبارت $a^{\frac{1}{n}}$ ، a را عددی مثبت در نظر می‌گیریم.

فعالیت

هریک از عبارت‌های زیر را به شکل رادیکالی نوشته و در صورت امکان حاصل آنها را به دست آورید.

$$2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$$

$$5^{\frac{1}{7}} =$$

$$3^{\frac{1}{2}} =$$

$$6^{\frac{1}{4}} =$$

$$64^{\frac{1}{6}} =$$

$$81^{\frac{1}{4}} =$$

فعالیت

حاصل $a^{\frac{m}{n}}$ که $a > 0$ و m و n دو عدد طبیعی هستند را چگونه حساب می‌کنیم؟

در مبحث توان با نماهای طبیعی یادتان هست چگونه عمل کردیم؟

$$2^6 = 2^{2 \times 3} = (2^2)^3$$

(قاعده ضرب توان)

در مورد توان‌های گویا هم می‌توانیم به طریق مشابه عمل کنیم:

$$2^{\frac{2}{3}} = 2^{2 \times \frac{1}{3}} = (2^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$$

$$5^{\frac{8}{3}} = 5^{8 \times \frac{1}{3}} = (5^8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5^8}$$

به طور کلی:

هرگاه $a > 0$ برای هر دو عدد طبیعی m و n ، $a^{\frac{m}{n}}$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

اگر $a > 0$ و m و n دو عدد طبیعی، $a^{\frac{m}{n}}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$$

بنابراین: $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ همچنین $a^{-\frac{m}{n}}$ نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

اکنون شما اعداد توان‌دار زیر را به شکل رادیکال بنویسید و در صورت امکان حاصل آنها را به دست آورید.

$$81^{\frac{3}{4}} \quad (\text{پ})$$

$$3^{\frac{2}{7}} \quad (\text{ب})$$

$$5^{\frac{2}{5}} \quad (\text{الف})$$

$$4^{\frac{3}{2}} \quad (\text{ث})$$

$$16^{-\frac{1}{4}} \quad (\text{ت})$$

اگر r و s دو عدد گویا باشند، و a و b اعدادی مثبت باشند، داریم:

$$1) a^r \times a^s = a^{r+s}$$

$$2) (a^r)^s = a^{rs}$$

$$3) (ab)^r = a^r \times b^r$$

باکتری‌ها موجودات بسیار ریزی هستند که در انواع مختلف در همه جا حضور دارند. بیشتر باکتری‌ها در فاصله ۲۰ دقیقه به حداکثر رشد خود می‌رسند و می‌توانند شروع به تولید مثل کنند. در شرایط مناسب، باکتری با سرعت زیادی تکثیر می‌شود. مثلاً یک باکتری بعد از ۲۰ دقیقه به دو باکتری تبدیل می‌شود و بعد از ۲۰ دقیقه دیگر به چهار باکتری تبدیل می‌شود و به همین ترتیب، در فاصله هر ۲۰ دقیقه، تعداد باکتری‌ها دو برابر می‌شود و به ترتیب ۸ و ۱۶ و ۳۲ و ۶۴ و ۱۲۸ و ۲۵۶ و ... باکتری پدید می‌آید. اگر این روش تکثیر باکتری‌ها ۲۴ ساعت ادامه یابد، از یک باکتری، توده‌ای از باکتری‌ها به وزن ۲۰۰۰ تن به وجود خواهد آمد. البته عملاً چنین اتفاقی نمی‌افتد، زیرا در این صورت، آب و مواد غذایی لازم به زودی در محیط زندگی آنها تمام می‌شود و دیگر قادر به تولیدمثل بیشتر نخواهند بود. اگرچه بعضی از باکتری‌ها عامل فساد مواد غذایی و بیماری هستند؛ اما بسیاری از باکتری‌ها مفیدند. باکتری‌ها در تهیه فراورده‌های غذایی و شیمیایی و همچنین در شناسایی و استخراج معادن و پاکسازی محیط زیست کاربرد دارند. باکتری‌هایی نیز برای خالص سازی عناصر معدنی مانند مس و اورانیوم کاربرد دارند. همچنین باکتری‌ها در پاکسازی آب‌ها و خاک‌های آلوده به آلاینده‌های نفتی و شیمیایی کاربرد وسیعی دارند. باکتری‌ها نقش بسیار مهم در اکوسیستم جهانی (اکوسیستم‌های آبی و خشکی) دارند. مهم‌ترین راه دستیابی گیاهان به نیتروژن توسط برخی از باکتری‌ها صورت می‌گیرد.

۱ تساوی‌های زیر را مانند نمونه به صورت رادیکالی بنویسید.

$$3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2}$$

$$3^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{3^5} = \sqrt[4]{3^4 \times 3} = \sqrt[4]{3^4} \times \sqrt[4]{3} = 3\sqrt[4]{3}$$

$$4^{\frac{1}{5}} =$$

$$2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{3}{2}} =$$

$$(4 \times 2)^{\frac{1}{3}} =$$

$$5^{\frac{4}{3}} =$$

$$(16^{\frac{1}{3}})^{\frac{2}{4}} =$$

$$6^{\frac{3}{8}} =$$

۲ رادیکال‌ها را در صورت امکان به شکل توان کسری بنویسید.

$$\sqrt[5]{3^2} = 3^{\frac{2}{5}}$$

$$\sqrt{2^5} =$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}} =$$

$$\sqrt[5]{19} =$$

$$\sqrt[5]{64} =$$

$$\sqrt[5]{2^5} =$$

۳ با استفاده از نمای کسری نشان دهید که $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$ است. تساوی را کامل کنید ($a > 0$).

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{m}}} = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}} = \dots\dots$$

تمرین

۱ هریک از توان‌های کسری زیر را به صورت رادیکال نوشته و در صورت امکان حاصل آنها را به دست آورید.

$$16^{\frac{1}{2}} =$$

$$5^{\frac{1}{2}} =$$

$$4^{\frac{3}{7}} =$$

$$3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} =$$

$$(4^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}} =$$

$$4^{\frac{2}{3}} =$$

$$32^{-\frac{1}{5}} =$$

$$32^{\frac{2}{5}} =$$

$$125^{-\frac{2}{3}} =$$

۲ می‌دانیم

$$\sqrt[5]{a^2} = a^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$$

$$\sqrt[12]{a^4} = (a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{12}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$$

آیا تساوی $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$ همواره برقرار است ($a > 0$)؟ n, m و k طبیعی‌اند نتیجه بگیرید که هر سه عدد $\sqrt{2}$ ، $\sqrt[4]{2^2}$ و $\sqrt[6]{2^3}$ برابرند.

۳ فرض کنیم $a=64$ ، $r=\frac{1}{3}$ و $s=\frac{1}{4}$ مقدارهای عددی $\frac{a^r}{a^s}$ و a^{r-s} را محاسبه و با هم مقایسه کنید.

اکنون خودتان، مانند نمونه سه مقدار دیگر برای a ، r و s انتخاب کنید و بار دیگر مقدارهای $\frac{a^r}{a^s}$ و a^{r-s} را محاسبه و با هم مقایسه کنید. می‌توانید از ماشین حساب کمک بگیرید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۴ حساب کنید.

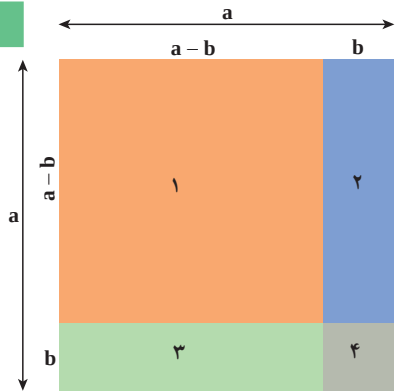
$$\sqrt[3]{\sqrt{5}} =$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{64}} =$$

$$\sqrt{\sqrt{81}} =$$

درس چهارم: عبارت‌های جبری

فعالیت



در سال گذشته با برخی از اتحادهای جبری آشنا شده‌اید. می‌توانید بگویید چرا به تساوی

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (1)$$

اتحاد گفته می‌شود؟

در حقیقت می‌توان a و b را در دو طرف با هر دو عدد دلخواه جایگزین کرد و برای دو طرف یک عدد به دست آورد. برای مثال اگر $a = \frac{1}{5}$ و $b = 3$ اختیار شود.

$$\left(\frac{1}{5} + 3\right)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 2 \times \frac{1}{5} \times 3 + 3^2$$

$$\left(\frac{16}{5}\right)^2 = \frac{1}{25} + \frac{6}{5} + 9 \rightarrow \frac{256}{25} = \frac{256}{25}$$

یا اگر در رابطه (۱) به جای b ، $-b$ قرار دهیم، به دست می‌آوریم:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (2)$$

گاهی هم دو اتحاد (۱) و (۲) را با هم می‌نویسیم:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad (3)$$

اکنون شما می‌توانید اتحادهای دیگری به دست آورید.

۱ با محاسبه $(a+b)^2$ اتحاد دیگری به دست می‌آید که به اتحاد مکعب مجموع مشهور است. جای خالی را در محاسبه تکمیل کنید.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$

$$= (\quad)(a+b) = \dots\dots\dots$$

که با جمع جملات مشابه در دو طرف دوم، اگر درست عمل کرده باشید، به صورت زیر در می‌آید.

$$(a+b)^2 = a^2 + 3a^2b + 3ab^2 + b^2$$

می‌توانیم b را در سرتاسر اتحاد فوق به $-b$ تبدیل کنیم و اتحاد دیگری به دست آوریم:

$$(a-b)^2 = a^2 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - \dots\dots\dots + \dots\dots\dots - b^2$$

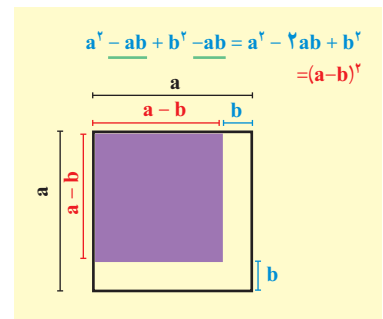
$$S_1 = (a-b)^2$$

$$S_1 = S - S_2 - S_3 - S_4$$

$$= a^2 - b(a-b) - b(a-b) - b^2$$

$$= a^2 - 2ab + b^2$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$



۲ یک بار دیگر $(a-b)^2$ را از راه دیگر و با استفاده از اتحاد مربع تفاضل، یعنی اتحاد شماره ۲ محاسبه کنید.

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) \\ = (\quad) (a-b) =$$

۳ اگر ابتدا طرف دوم هر یک از اتحادهای ۴ گانه فوق را بنویسیم، مثلاً

$$a^2 - 3a^2b + 3ab^2 - b^2 = (a-b)(a-b)(a-b) \quad (۲)$$

می‌گوییم عبارت سمت چپ؛ یعنی $a^2 - 3a^2b + 3ab^2 - b^2$ را به حاصل ضرب سه عبارت سمت راست تجزیه کرده‌ایم. هر یک از عبارت‌های $a-b$ را در (۴) یک عامل یا شمارنده تجزیه می‌نامیم. ممکن است عامل‌های تجزیه مساوی نباشند. تجزیه برخی عبارت‌های جبری به دسته‌بندی مناسب جملات و مهارت‌های بیشتری نیاز دارد. به مثال‌های زیر توجه کنید.

یادآوری

اتحادهایی که سال قبل خوانده‌اید.

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

مثال ۱

عبارت $2x^2 + 3x + 1$ را تجزیه کنید.

می‌نویسیم:

$$2x^2 + 3x + 1 = x^2 + 2x + 1 + x^2 + x \\ = (x+1)^2 + x(x+1) \\ = (x+1)(x+1+x) = (x+1)(2x+1)$$

مثال ۲

عبارت $a^2 - 2ab + a^2b - 2b^2$ را تجزیه کنید:

$$a^2 - 2ab + a^2b - 2b^2 = a^2(a+b) - 2b(a+b) \\ = (a+b)(a^2 - 2b)$$

	a	b	c
a	a^2	ab	ac
b	ab	b^2	bc
c	ac	bc	c^2

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

کار در کلاس

۱ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید و ساده کنید.

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + \dots$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) =$$

۲ با استفاده از پرسش ۱، عبارت‌های $a^2 + b^2$ و $a^2 - b^2$ را تجزیه کنید و اتحادهای جدیدی به دست آورید.

۳ عبارت‌های زیر را مانند نمونه تجزیه کنید.

$$\begin{aligned} 8x^3 - 27 &= (2x)^3 - 3^3 \\ &= (2x-3)[(2x)^2 + 2x \times 3 + 3^2] \\ &= (2x-3)(4x^2 + 6x + 9) \end{aligned}$$

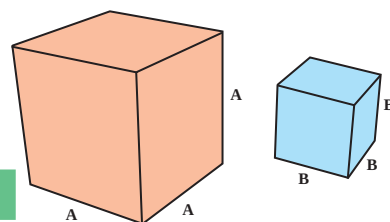
$$x^3 + 1 =$$

$$x^3 - 8 =$$

$$x^3 - 125 =$$

$$x^6 - 1 =$$

$$\begin{aligned} (a+b)(a^2 - ab + b^2) &= a^3 + b^3 \\ (a-b)(a^2 + ab + b^2) &= a^3 - b^3 \end{aligned}$$



فعالیت

واژه‌های مضرب و شمارنده را در حساب اعداد به‌خاطر دارید:

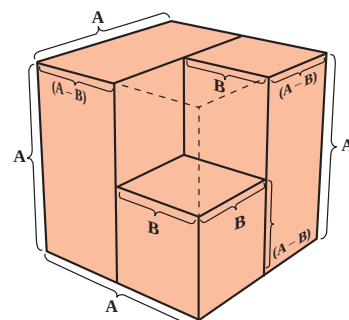
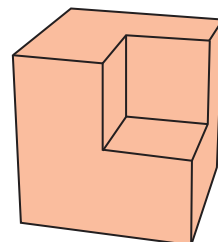
$$12 = 3 \times 4$$

هر یک از عددهای ۳ و ۴ را یک شمارنده عدد ۱۲ و عدد ۱۲ را مضرب هر یک از این عددها می‌نامیم. ۱۲ شمارنده‌های دیگری نیز دارد، از جمله خود عدد ۱۲. عدد ۳ مضرب‌های دیگری دارد، از جمله خود عدد ۳ و همچنین هر یک از عددهای ۶، ۹، ۱۵ و ...

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \quad \text{مشابه این در اتحاد مزدوج}$$

هر یک از عبارت‌های $a-b$ و $a+b$ یک عامل $a^2 - b^2$ است. همچنین $a^2 - b^2$ هم مضرب $a-b$ و هم مضرب $a+b$ است.

$$A^3 - B^3$$



آیا $a+b$ مضرب دیگری دارد؟

۱ مضرب‌های هر عبارت جبری از ضرب آن در عبارت‌های جبری دیگر به‌دست می‌آیند: $a+b$ و $2(a+b)$ و $(a+b)(a+b)^2$ و $-4(a+b)$ و $(a+b)(a-b)$ و ...

مضرب‌های $a+b$

بعضی از مضرب‌های $a-b$ را بنویسید.

۲ دو عبارت بنویسید که $a-b$ شمارنده هر یک از آنها باشد.

۳ عبارت $27a^3 - 1$ مضرب کدام یک از عبارت‌هاست؟

پ) $9a^2 + 3a + 1$

ب) $3a - 1$

الف) $a - 1$

ت) $3a + 1$

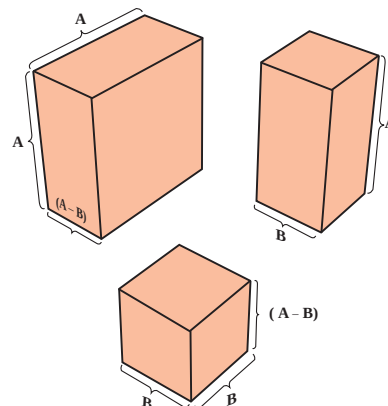
۴ کدام یک از عبارت‌های زیر گویا هستند؟

ب) $\frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$

الف) $\frac{3x - \sqrt{7}}{x^2}$

ت) $\sqrt[3]{x^2} + x - 1$

ب) $\sqrt[3]{x} - 1$



نکته: یک عبارت گویا به ازای مقدارهایی از متغیر که مخرج آن صفر می‌شود، تعریف نمی‌گردد. (مقدار ندارد)

۵ عبارت گویای زیر به ازای چه مقدارهایی از x تعریف نمی‌شود؟

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2+4}$$

۶ حاصل کسرهایی زیر را به دست آورید و ساده کنید.

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} + \frac{3}{x-1}$$

(الف)

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2-1}$$

(ب)

کار در کلاس

۱ صورت و مخرج هر کسر را تجزیه و عبارت را ساده کنید. (جاهای خالی را پر کنید)

$$\text{الف) } \frac{x^6+1}{x^4+2x^2+1}$$

$$\text{ب) } \frac{x^3-1}{(x-1)^3}$$

$$\text{پ) } \frac{x^2+1}{x^4-1}$$

$$\text{ت) } \frac{y^5-y^3-12y}{8y^2+16y} = \frac{y(y^4-y^2-12)}{8y(y+2)} = \frac{y(y^2-4)(y^2+3)}{8y(y+2)} = \dots\dots$$

۲ در اتحاد

$$a^2+1=(a+1)(a^2-a+1)$$

قرار دهید $a = \sqrt[3]{x^2}$ و حاصل را بازنویسی کنید:

$$(\sqrt[3]{x^2})^3+1=(\sqrt[3]{x^2}+1)(\quad)$$

گویا کردن مخرج کسرها

فعالیت

۱ از سال گذشته به یاد داریم که برای گویا کردن مخرج کسرهایی که شامل یک عبارت رادیکالی هستند، می‌توانیم آن کسر را در یک عبارت رادیکالی مناسب، ضرب و تقسیم کنیم تا مخرج کسر گویا شود. در زیر کسرهایی $\frac{5}{2\sqrt{3}}$ و $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$ گویا شده‌اند. جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$$\frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dots$$

$$\frac{2}{\sqrt[3]{4}} = \frac{2}{\sqrt[3]{4}} \times \frac{\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^2}} = \dots$$

۲ دو عبارت مانند $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ و $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ که شامل مجموع و تفاضل دو قسمت یکسان هستند را مزدوج یکدیگر می‌گوییم. حاصل ضرب این دو عبارت را می‌توانیم به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، سمت راست تساوی بالا فاقد یک عبارت رادیکالی است. از این روش برای گویا کردن مخرج کسرها استفاده می‌کنیم. به عنوان مثال، برای گویا کردن $\frac{2}{\sqrt{3}+5}$ به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$\frac{2}{\sqrt{3}+5} = \frac{2}{\sqrt{3}+5} \times \frac{\sqrt{3}-5}{\sqrt{3}-5} = \frac{2(\sqrt{3}-5)}{(\sqrt{3})^2-5^2} = \frac{2(\sqrt{3}-5)}{3-25} = \frac{5-\sqrt{3}}{11}$$

مانند نمونه بالا، مخرج کسره‌ای زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} =$

ب) $\frac{8}{3\sqrt{2}+4} =$

پ) $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} =$

ت) $\frac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}} =$

۳ از اتحادهای مجموع و تفاضل مکعب‌ها که به صورت زیر هستند، برای گویا کردن کسرهایی مانند $\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$ و $\frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$ استفاده می‌کنیم. در هر کدام از اتحادهای زیر، قرار دهید $x = \sqrt[3]{a}$ ، $y = \sqrt[3]{b}$ و آنها را بازنویسی کنید.

$$\begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3-y^3 \\ (\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\dots\dots\dots) = \dots\dots\dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+y)(x^2-xy+y^2) = x^3+y^3 \\ (\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\dots\dots\dots) = \dots\dots\dots \end{cases}$$

آیا سمت راست تساوی‌های بالا، شامل یک عبارت رادیکالی است؟

برای گویا کردن مخرج کسره‌ای $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$ و $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-1}$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} \times \frac{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1} = \frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{(\sqrt[3]{2})^3-1^3} = \frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{2-1} = \sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-1} = \frac{((\sqrt[3]{x^2})^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1)}{(\sqrt[3]{x^2}-1)((\sqrt[3]{x^2})^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1)} = \frac{((\sqrt[3]{x^2})^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1)}{(x^2-1)}$$

مانند نمونه بالا، مخرج کسره‌های زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{2}{\sqrt[3]{5}+1} =$

ب) $\frac{1}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{3}} =$

پ) $\frac{x+8}{\sqrt[3]{x}+2} =$

ت) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+1} =$

تمرین

۱ هریک از عبارت‌های زیر را تا حد ممکن (به عبارت‌های گویا) تجزیه کنید.

ت) $a^3b^6 - 8$

پ) $8a^3 + 27$

ب) $x^6 - y^6$

الف) $x^4 - y^4$

۲ مخرج کسره‌های زیر را گویا کنید.

ت) $\frac{6}{2\sqrt[3]{2}-1}$

پ) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}-2}$

ب) $\frac{8}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

الف) $\frac{3}{3+\sqrt{7}}$

۳ با استفاده از اتحادها، حاصل ضرب‌های زیر را مانند نمونه به دست آورید.

ت) 105^2

پ) 9999^2

ب) 105^2

الف) $16 \times 14 = (15+1)(15-1) = 15^2 - 1 = 224$

۴ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

ب) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1} - \frac{1}{x-1}$

الف) $\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} - \frac{5x}{x-1}$

۵ اگر $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-4} = 3$ ، حاصل عبارت $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-4}$ را به دست آورید.

خواندنی

* سه عدد ۴، ۳ و ۵ را یک سه‌تایی فیثاغورسی می‌نامیم، زیرا

$$5^2 = 4^2 + 3^2$$

یک سه‌تایی دیگر مثال بزنید. چند تا از این گونه سه‌تایی‌ها را می‌توانید شناسایی کنید؟

* (جادوی توان) محاسبات نشان می‌دهد:

$$(1/0.1)^{365} = 37/8$$

$$(0/99)^{365} = 0/0.3$$

چرا اینقدر اختلاف وجود دارد؟ حال $(1/0.1)^{73}$ و $(0/99)^{73}$ را محاسبه و مقایسه کنید.

اگر هر روز اندکی کار خود را نسبت به روز قبل بهتر کنیم، در سال حدود 40% برابر راندمان (بهره‌وری) کار افزایش می‌یابد.

شما هم داستانی در باب توان‌ها بنویسید.

* (مثلث خیام)

$$(a+b)^1 = a + b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$



چه رابطه‌ای بین ضرایب در بسط اتحادها و سطرهای مثلث خیام وجود دارد؟

می‌توانید توان چهارم دوجمله‌ای را حساب و ضرایب بسط را مشخص کنید.

$$(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b)$$

$$= (\quad \quad \quad)(a+b)$$

$$=$$

معادله‌ها و نامعادله‌ها



سد کارون ۳

سدهای قوسی، سازه‌هایی هستند که هزینه ساخت بسیار بالایی دارند. کاهش هزینه‌ها معمولاً با بهینه‌سازی‌هایی روی منحنی‌هایی انجام می‌شود که سهمی یکی از معروف‌ترین آنهاست.

معادله درجه دوم و روش‌های
مختلف حل آن

درس اول

سهمی

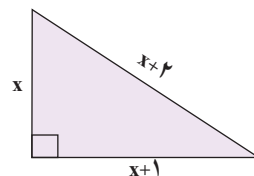
درس دوم

تعیین علامت

درس سوم

درس اول: معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن

صبحا بعد از حل یک مسئله هندسه به نکته جالبی پی برد. او پی برد که اضلاع مثلث مسئله او، سه عدد متوالی ۳، ۴ و ۵ هستند و این مثلث، قائم الزاویه است (چرا؟). از خواهر بزرگ تر خود، دُرسا، سؤال کرد که آیا می‌توان مثلث قائم الزاویه دیگری پیدا کرد که اضلاع آن سه عدد متوالی دیگر باشند؟ برای پاسخ به این سؤال، درسا، مثلث قائم الزاویه‌ای رسم کرد و طول کوچک‌ترین ضلع آن را x و طول اضلاع دیگر را اعداد متوالی بعد از x ، یعنی $x+1$ و $x+2$ در نظر گرفت و به کمک رابطه فیثاغورس، رابطه زیر را بین سه ضلع مثلث به دست آورد:



$$x^2 + (x+1)^2 = (x+2)^2$$

اکنون او می‌خواست معادله به دست آمده را حل کند؛ یعنی مقادیری برای x پیدا کند که تساوی بالا را برقرار کنند. برای این کار معادله بالا را ساده کرد و آن را به شکل $x^2 - 2x - 3 = 0$ نوشت. هر معادله به این صورت را که پس از ساده‌شدن، بزرگ‌ترین توان متغیر آن ۲ باشد، معادله درجه دوم می‌نامیم.

هر معادله به شکل

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad , \quad (a \neq 0)$$

که در آن a ، b و c اعداد حقیقی هستند را یک معادله درجه دوم می‌نامیم.

در این بخش، تعدادی از روش‌های حل این معادله را توضیح می‌دهیم.



حل معادله درجه دوم به روش تجزیه

شعاعیت

معادله درجه دوم $x^2 - 2x - 3 = 0$ را که درسا در بخش قبل به آن رسید، در نظر بگیرید.

۱ با تجزیه سمت چپ معادله بالا، جای خالی را با عدد مناسب پر کنید.

$$(x + 1)(x - \dots) = 0$$

ویژگی حاصل ضرب صفر

اگر A و B دو عبارت جبری باشند و $AB = 0$ ، آنگاه حداقل یکی از این دو عبارت صفر است؛ یعنی:

$$AB = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ یا } B = 0$$

۲ از ویژگی بالا استفاده کنید و جاهای خالی را با عبارت های مناسب پر کنید.

$$(x+1)(x-\dots) = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \text{ یا } x-\dots = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ یا } x = \dots$$

برای اطمینان از صحت جواب های حاصل شده، می توانیم هر دو جواب به دست آمده را در معادله قرار دهیم و آنها را آزمایش کنیم. یکی از جواب ها آزمایش شده است؛ جواب دیگر را آزمایش کنید.

$$x = -1$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(-1)^2 - 2(-1) - 3 = 0$$

$$1 + 2 - 3 = 0$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

$$x = \dots$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$? = 0$$

$$\dots = 0$$

$$? = 0$$

$$\dots = 0$$

$$\dots = 0 \quad \square$$

آیا هر دو جواب این معادله می توانند طول اضلاع مثلث قائم الزاویه ای باشند که قبلاً درباره آن بحث شده است؟ توضیح دهید.

کار در کلاس

معادله های درجه دوم زیر را به روش تجزیه حل کنید و جواب های خود را آزمایش کنید.

ب) $3t^2 - t = 0$

الف) $x^2 - 3x = 1$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

حل معادله درجه دوم به کمک ریشه‌گیری

فعالیت

معادله درجه دوم $x^2 = 25$ را در نظر بگیرید.

۱ جواب‌های این معادله را به روش تجزیه به دست آورید.

۲ ریشه‌های دوم عدد ۲۵ را به دست آورید. این معادله را به روش تجزیه نیز حل کنید و جواب‌های به دست آمده را با این جواب‌ها مقایسه کنید.

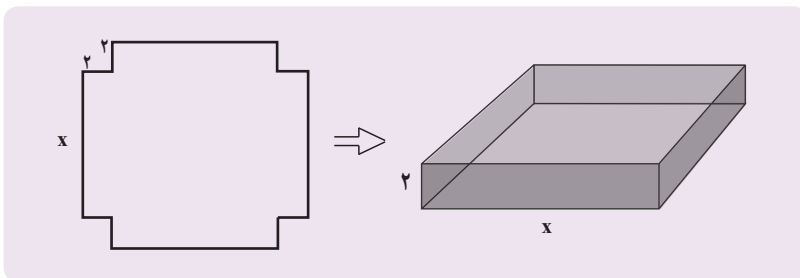
۳ اگر $x^2 = a$ یک معادله درجه دوم باشد که در آن a یک عدد حقیقی است، آیا همیشه می‌توان جواب‌های آن را به صورت $x = \pm\sqrt{a}$ نوشت؟ توضیح دهید.

اگر a یک عدد حقیقی نامنفی (بزرگ‌تر یا مساوی صفر) باشد، ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 = a$ عبارت‌اند از:

$$x = -\sqrt{a} \text{ و } x = \sqrt{a}$$

مثال

با یک دستگاه برش، یک صفحه مقوایی به شکل مربع را برش می‌زنیم. سپس، چهار مربع کوچک در گوشه‌های آن را جدا می‌کنیم. بعد با تا زدن لبه‌ها، یک جعبه می‌سازیم. اگر مربع‌های جداشده به ضلع ۲ سانتی‌متر باشند و بخواهیم حجم این جعبه، ۲۰۰ سانتی‌متر مکعب باشد، طول اضلاع کاغذهایی را که باید برای این کار انتخاب شوند، به دست آورید.



حل: از مقوایی که در شکل سمت چپ رسم شده، چهار مربع به ضلع ۲ سانتی‌متر جدا می‌کنیم تا جعبه‌ای که سمت راست رسم شده، به دست آید. حجم این جعبه عبارت است از:

$$2x^2 = (2)(x)(x) = \text{ارتفاع} \times \text{عرض} \times \text{طول}$$

از آنجا که حجم جعبه، 200 سانتی متر مکعب باید باشد، داریم: $2x^2 = 200$. بنابراین $x^2 = \dots$ و با محاسبه ریشه های دوم این معادله، جواب های $x = \dots$ به دست می آید. و چون طول نمی تواند منفی باشد، تنها $x = \dots$ مورد قبول است و طول ضلع مربع اولیه $x + \dots = \dots + \dots = \dots$ سانتی متر است.

کار در کلاس

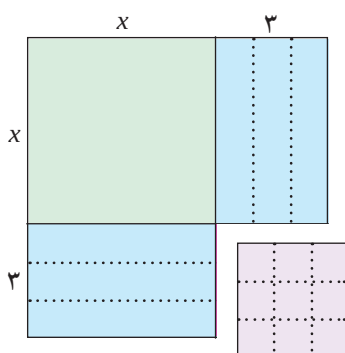
جواب هر یک از معادله های زیر را در صورت وجود به روش ریشه گیری به دست آورید.

الف) $5x^2 = 20$ ب) $t^2 + 7 = 0$ پ) $(t - 2)^2 = 16$

.....
.....

حل معادله درجه دوم به روش مربع کامل

فعالیت

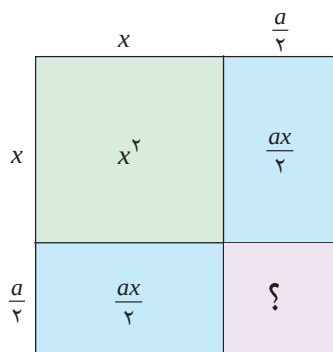


۱ دو جمله ای $x^2 + 6x$ را در نظر بگیرید. چه عددی باید به این دو جمله ای اضافه شود تا چند جمله ای حاصل به شکل مربع کامل نوشته شود؟ جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید.

$$x^2 + 6x + \dots = (x + \dots)^2$$

اعدادی که در جاهای خالی نوشته اید، چه ارتباطی با شکل روبه رو دارند؟

.....



۲ اگر a یک عدد حقیقی باشد، به دو جمله ای $x^2 + ax$ چه جمله ای باید اضافه شود تا به شکل مربع کامل درآید؟ جاهای خالی را با عبارت های مناسب پر کنید.

$$x^2 + ax + \dots = (x + \dots)^2$$

مثال

معادله $x^2 - 6x + 4 = 0$ را به روش مربع کامل حل می کنیم.

$$x^2 - 6x + 4 = 0$$

معادله درجه دوم

$$x^2 - 6x = -4$$

به دو طرف معادله، -4 را اضافه کرده ایم

$$x^2 - 6x + \dots = -4 + \dots$$

به دو طرف معادله $\dots$ را اضافه کرده ایم تا سمت چپ مربع کامل شود

$$(x - 3)^2 = 5$$

سمت چپ را به شکل مربع کامل می نویسیم

$$x - 3 = \pm \sqrt{5}$$

از دو طرف معادله، ریشه دوم می گیریم

$$x = 3 \pm \sqrt{5}$$

به دو طرف معادله عدد 3 را اضافه کرده ایم

بنابراین جواب ها یا ریشه های این معادله عبارت اند از $3 + \sqrt{5}$ و $3 - \sqrt{5}$.

معادله‌های زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

الف) $x^2 + 2x = 24$

ب) $t^2 + 3t = 3$

پ) $n^2 - 4n + 5 = 0$

ت) $2r^2 + r - 2 = 0$

.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....

حل معادله درجه دوم به روش فرمول کلی

فعالیت

در بخش‌های قبل، روش‌هایی برای حل معادله‌های درجه دوم فرا گرفته‌اید. اکنون می‌خواهیم یک فرمول کلی برای حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ که در آن $a \neq 0$ است، پیدا کنیم.

دانش آموز: آیا با روش مربع کامل می‌توان هر معادله درجه دوم را حل کرد؟
معلم: بله. برای حل معادله $ax^2 + bx + c = 0$ با این روش مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

دو طرف معادله را بر a تقسیم می‌کنیم

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

به دو طرف معادله، را اضافه کرده‌ایم

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \dots = -\frac{c}{a} + \dots$$

به دو طرف معادله، را اضافه کرده‌ایم تا سمت چپ مربع کامل شود

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

دو طرف را ساده کرده‌ایم

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \quad \text{پس: } \Delta = b^2 - 4ac$$

آیا می‌توانید با ریشه دوم گرفتن از دو طرف این معادله، جواب‌های آن را به دست آورید؟

دانش آموز: اگر $\Delta < 0$ باشد، از سمت راست نمی‌توان ریشه دوم گرفت.

معلم: آفرین؛ پس اگر Δ یک عدد منفی باشد، معادله درجه دوم ریشه‌ای ندارد. اگر $\Delta > 0$ باشد، آیا می‌توانید ریشه‌های این معادله را به دست آورید؟

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \quad \text{ریشه دوم بگیریم:}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

دانش آموز: اگر $\Delta = 0$ باشد، آیا این معادله ریشه‌ای دارد؟
معلم: بله و این ریشه از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

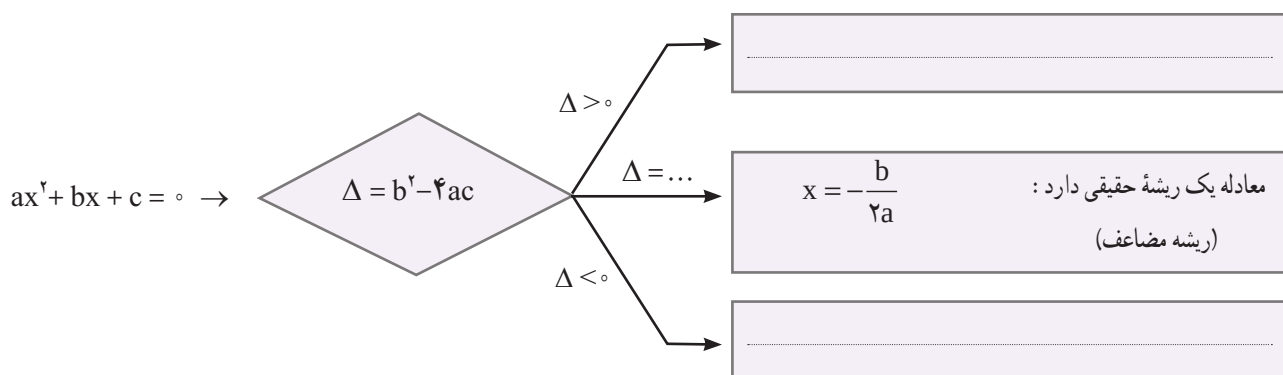
دانش آموز: پس در حالت $\Delta = 0$ معادله تنها یک ریشه به صورت $x = -\frac{b}{2a}$ دارد.

معلم: این ریشه از معادله $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a}\right) = 0$ به دست آمده است و چون

هر دو معادله $x + \frac{b}{2a} = 0$ و $x + \frac{b}{2a} = 0$ جواب یکسان دارند، به جواب مشترک آنها، ریشه مضاعف یا ریشه مکرر مرتبه دوم می‌گوییم.

کار در کلاس

۱ با توجه به فعالیت بالا، جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.



شهر سوخته، سیستان و بلوچستان

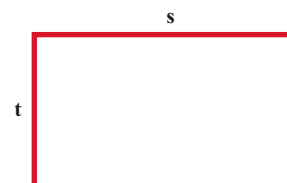
۲ معادله‌های زیر را با فرمول کلی حل کنید.

الف) $x^2 - x + 1 = 0$

ب) $-2x^2 + x + 3 = 0$

پ) $-x^2 + 4x - 4 = 0$

مثال



از یک رشته سیم به طول 5° متر، می‌خواهیم یک مستطیل به مساحت 144 متر مربع بسازیم. طول و عرض این مستطیل را مشخص کنید.

حل: اگر طول و عرض این مستطیل، برابر با s و t باشند، با توجه به اینکه محیط آن 5° متر است، پس $2(s+t) = 5^\circ$. از ساده کردن این معادله به معادله $s+t = 25$ می‌رسیم؛ بنابراین $t = 25 - s$.

از سوی دیگر $st = 144$. با جای‌گذاری t برحسب s در این معادله به شکل $s(25-s) = 144$ می‌رسیم که بعد از ساده شدن، معادله درجه دوم $s^2 - 25s + 144 = 0$ به دست می‌آید. در این معادله $a=1$, $b=-25$, $c=144$ ؛ بنابراین

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-25)^2 - 4(1)(144) = 625 - 576 = 49$$

پس $\Delta > 0$ و معادله دو ریشه حقیقی دارد که به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} s_1 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{25 \pm 7}{2} = \frac{32}{2} = 16 \\ s_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{25 - 7}{2} = \frac{18}{2} = 9 \end{cases}$$

و چون $t = 25 - s$ ، پس برای t نیز دو جواب به دست می‌آید:

$$\begin{cases} s_1 = 16 \Rightarrow t_1 = 25 - 16 = 9 \\ s_2 = 9 \Rightarrow t_2 = 25 - 9 = 16 \end{cases}$$

بنابراین در هر حالت یک مستطیل با اضلاع 9 و 16 سانتی‌متر به دست می‌آید.

تمرین

۱) معادله‌های زیر را به کمک تجزیه حل کنید.

۱) $x^2 - 11x = -10$

۲) $5t^2 = 20$

۳) $5a^2 - 7a = 2a(a - 3)$

۴) $4k^2 - 12k + 8 = 0$

۲) هر یک از معادله‌های زیر را با ریشه دوم گرفتن حل کنید.

۱) $n^2 - 2 = 26$

۲) $x^2 + 12 = 3$

۳) $(3t - 2)^2 = 4$

۴) $3 - 3k = 3k(2k - 1)$

۳) معادله‌های زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

۱) $x^2 - 6x = 7$

۲) $s^2 - 3s + 3 = 0$

۳) $r^2 + 4r + 4 = 0$

۴) $2a^2 + 5a - 3 = 0$

۴) هر یک از معادله های زیر را با روش فرمول کلی حل کنید.

۱) $4x^2 - 13x + 3 = 0$

۲) $r - r^2 = 3$

۳) $a^2 + 2\sqrt{3}a = 9$

۴) $\frac{t^2}{3} - \frac{t}{2} - \frac{3}{2} = 0$

۵) هر یک از معادله های زیر را به روش دلخواه حل کنید.

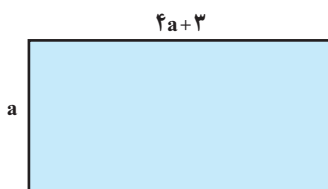
۱) $2x^2 = 250$

۲) $9 - 6z + z^2 = 0$

۳) $4a^2 + 3a = 1$

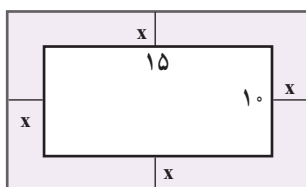
۴) $b^2 + \sqrt{2}b - 4 = 0$

۶) مجموع مربعات دو عدد فرد متوالی 290° است. این دو عدد را پیدا کنید.



۷) طول یک مستطیل ۳ سانتی متر بیشتر از ۴ برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۴۵ سانتی متر مربع باشد، ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.

۸) اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر ۴ سال است. اگر چهار سال دیگر حاصل ضرب سن آنها 60° شود، سن هر کدام چقدر است؟



۹) یک عکس به اندازه 10° در 15° سانتی متر درون یک قاب با مساحت 300° سانتی متر مربع، قرار دارد. اگر فاصله همه لبه های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب عکس را پیدا کنید.



۱۰) در یک تیمگان (لیگ) والیبال، ۴۵ بازی انجام شده است. اگر هر تیم با دیگر تیم های تیمگان، تنها یک بازی انجام داده باشد، تعداد تیم های این تیمگان را به دست آورید. اگر تعداد بازی های تیمگان N و تعداد تیم ها n باشد، الگویی برای تعداد بازی ها به دست آورید.



۱۱) فشار خون نرمال^۱ یک شخص مذکر، که بر حسب میلی متر جیوه (mmHg) اندازه گیری می شود، با رابطه $P = 0.06s^2 - 0.02s + 120$ محاسبه می شود که در آن، P فشار خون نرمال یک فرد با سن s است. سن شخصی را پیدا کنید که فشار خون آن 125° میلی متر جیوه باشد. (از ماشین حساب استفاده کنید.)

۱- منظور از این نوع فشار خون، فشار خون سیستولیک است.

درس دوم: سهمی

آیا تاکنون به مسیری که یک اسکی‌باز یا موتورسوار در مسابقه پرش ارتفاع می‌پیماید، دقت کرده‌اید؟ هیچ کدام از این مسیرها، یک خط راست نیستند.
مسیر طی شده توسط اسکی‌باز یا موتورسوار می‌تواند توسط معادله $y = ax^2 + bx + c$ محاسبه شود که در آن a ، b و c اعداد حقیقی هستند و البته $a \neq 0$ است.

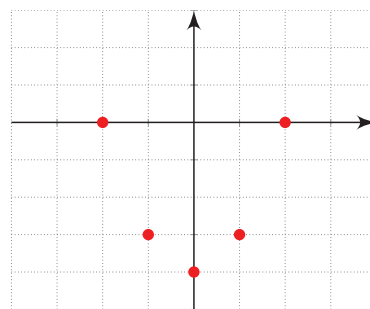


فعالیت

معادله $y = x^2 - 4$ را در نظر بگیرید.

الف) در جدول زیر، چند نقطه که در این معادله صدق می‌کنند، آمده است. این جدول را کامل کنید.

x	$y = x^2 - 4$	(x, y)
-2	$y = (-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$	$(-2, 0)$
-1		
0	$y = (0)^2 - 4 = 0 - 4 = -4$	$(0, -4)$
1		
2		

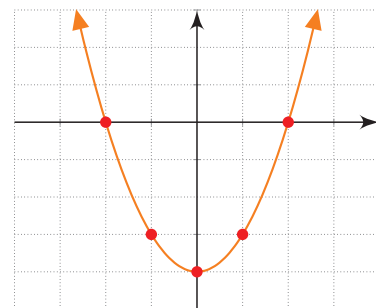


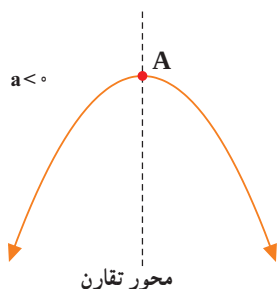
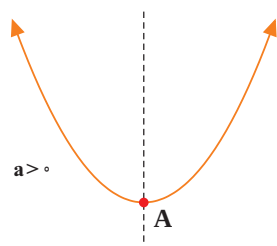
نقاط به دست آمده در جدول بالا را در یک دستگاه مختصات مشخص کرده و آنها را به یکدیگر وصل می‌کنیم (شکل‌های روبه‌رو).

ب) پایین‌ترین نقطه این نمودار چه نقطه‌ای است؟ آیا می‌توانید محور تقارن این نمودار را مشخص کنید؟

پ) برای رسم این نمودار، از چند نقطه استفاده کرده‌ایم؟ آیا با نقاط کمتری نیز می‌توانیم این نمودار را رسم کنیم؟

ت) محل برخورد منحنی رسم شده با محور x ها در چه نقاطی است؟





نمودار هر معادله به صورت $y = ax^2 + bx + c$ را که در آن a و b و c اعداد حقیقی هستند و $a \neq 0$ یک سهمی می‌گوییم که به یکی از دو صورت مقابل است:

نقطه A را در شکل‌های مقابل رأس سهمی می‌گوییم.
اگر $a > 0$ باشد، A پایین‌ترین نقطه سهمی و اگر $a < 0$ باشد، A بالاترین نقطه سهمی است.
همچنین خط عمودی که از رأس سهمی می‌گذرد، خط تقارن سهمی نامیده می‌شود.

فعالیت

معادله یک سهمی به صورت $y = x^2 - 4x + 5$ است.

الف سمت راست این معادله را به شکل مربع کامل بنویسید.

$$y = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow y = (x - 2)^2 + \dots$$

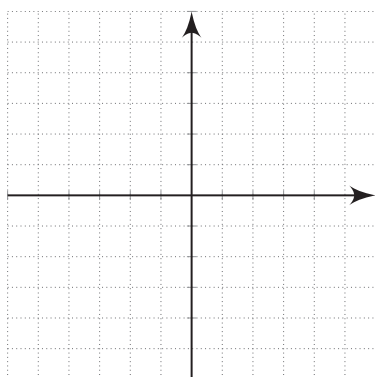
ب ریشه عبارت داخل پرانتز را به دست آورید و آن را در ردیف وسط جدول زیر قرار دهید. جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$$x - 2 = 0 \Rightarrow \dots\dots\dots$$

x	$y = x^2 - 4x + 5$	(x, y)
0		
1		
2		
3		
4		

پ پنج نقطه حاصل شده در جدول بالا را به یکدیگر وصل کنید تا این سهمی رسم شود.

ت آیا می‌توانید پایین‌ترین نقطه این سهمی را از معادله آن به شکل $y = (x - 2)^2 + 1$ به دست آورید؟



هر سهمی به صورت $y = a(x-h)^2 + k$ که $a \neq 0$ است، رأسی به مختصات (h, k) و خط تقارنی با معادله $x = h$ دارد.

کار در کلاس

۱ در هر یک از سهمی‌های زیر، رأس را مشخص و سپس آن را رسم کنید.

الف) $y = (x+1)^2 - 2$ ب) $y = -2x^2 + 1$

فعالیت

معادله سهمی به صورت $y = ax^2 + bx + c$ را در نظر بگیرید.

الف) سمت راست این معادله را به شکل مربع کامل بنویسید و نشان دهید:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

ب) با استفاده از قسمت قبل، نشان دهید که رأس این سهمی، نقطه $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ و خط تقارن آن نیز $x = -\frac{b}{2a}$ است.

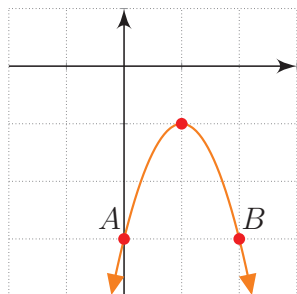
مثال

سهمی $y = -2x^2 + 4x - 3$ را رسم می‌کنیم.

در این سهمی $a = -2$ ، $b = 4$ و $c = -3$ است. مختصات رأس سهمی را به دست می‌آوریم.

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-4}{-4} = 1$$

اکنون در جدول زیر، سه نقطه از آن را پیدا می‌کنیم.

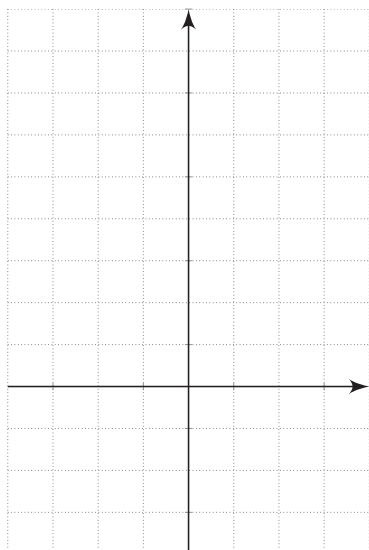


x	$y = -2x^2 + 4x - 3$	(x, y)
۰	$-2(0)^2 + 4(0) - 3 = -3$	$(0, -3)$
۱	$-2(1)^2 + 4(1) - 3 = -1$	$(1, -1)$
۲	$-2(2)^2 + 4(2) - 3 = -3$	$(2, -3)$

بنابراین نمودار این سهمی به صورت مقابل خواهد بود.

دقت کنید نقاط A و B از این سهمی که عرض یکسان دارند، نسبت به خط تقارن یعنی خط $x = 1$ قرینه‌اند.

۱- عرض رأس سهمی یعنی $\frac{4ac - b^2}{4a}$ را می‌توانید از قرار دادن $x = -\frac{b}{2a}$ در معادله سهمی به دست آورید.



معادلهٔ دو سهمی به صورت $y = \frac{x^2}{2} + 1$ و $y = 2x^2 + 1$ است.

الف مختصات رأس و دو نقطه دیگر از این دو سهمی را در جدول زیر مشخص کنید و سپس نمودار هر دو سهمی را در شکل مقابل رسم کنید و نشان دهید که مختصات رأس هر دو سهمی نقطه $A(0, 1)$ است.

x	$y = 2x^2 + 1$	(x, y)

x	$y = \frac{x^2}{2} + 1$	(x, y)

ب معادلهٔ سهمی دیگری را که نقطهٔ A رأس آن است، بنویسید و آن را در دستگاه بالا رسم کنید.

تمرین

۱ نمودار هر یک از سهمی‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y = -(x+1)^2 - 3$

ب) $y = 3x^2 - 2$

پ) $y = x - x^2$

ت) $y = \frac{x^2}{2} + x - 4$

۲ اگر $(-2, 5)$ و $(0, 5)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، خط تقارن این سهمی را به دست آورید.

۳ نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۲ و محور xها را در نقاط به طول ۱- و ۲ قطع کرده است. معادلهٔ این سهمی را بنویسید و آن را رسم کنید.

۴ دو پرتابگر وزنه در یک مسابقهٔ ورزشی، وزنه‌های خود را با زاویه‌های متفاوت α و β که $\alpha < \beta$ است، پرتاب کرده‌اند. پرتابگر A، زاویهٔ α را انتخاب می‌کند و مسیر طی شده از رابطهٔ $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + 2$ به دست می‌آید. پرتابگر B نیز زاویهٔ β را انتخاب می‌کند و مسیر

طی شده از رابطه $y = -2x^2 + 3x + 2$ به دست می‌آید. در هر دو معادله، y ارتفاع وزنه از سطح زمین و x مسافت افقی طی شده، بر حسب متر است.

الف) مسیر حرکت هر کدام از وزنه‌ها را رسم کنید.

ب) محل برخورد وزنه‌ها با زمین یا محور x ها در چه نقاطی است؟ کدام یک از وزنه‌ها مسافت افقی بیشتری را طی کرده است؟

پ) کدام یک از وزنه‌ها ارتفاع بیشتری از سطح زمین پیدا کرده است؟ اندازه آنها را مشخص کنید.

طوف سی سخت – کهگیلویه و بویر احمد



درس سوم: تعیین علامت

در یک شرکت تولیدی، سود حاصل از رابطه $P(x) = 5x - 200$ به دست می‌آید که در آن x تعداد کالای تولید شده است. جدول زیر، سود این شرکت را به ازای چند مقدار x نشان می‌دهد.

تعداد کالای تولید شده (x)	۱۰	۲۰	۴۰	۵۰	۱۰۰
سود حاصله $P(x) = 5x - 200$	-۱۵۰	-۱۰۰	۰	۵۰	۳۰۰

همان‌طور که از این جدول استنباط می‌شود، با تولید ۴۰ کالا، این شرکت هیچ سودی نخواهد داشت و اگر بیشتر از ۴۰ کالا تولید شود، شرکت به سوددهی می‌رسد؛ در حالی که با تولید کمتر از این تعداد کالا، این شرکت، سود منفی (زیان) خواهد داشت. علامت $P(x)$ برای x های مختلف از جدول زیر به دست می‌آید.

x	$x < 40$	۴۰	$x > 40$
$P(x)$	-	۰	+

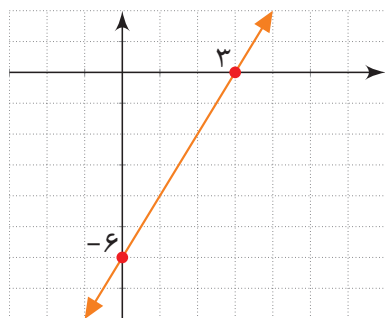
حل بسیاری از مسائل، نیازمند یافتن علامت یک عبارت خاص است که باید آن را تعیین علامت کرد.

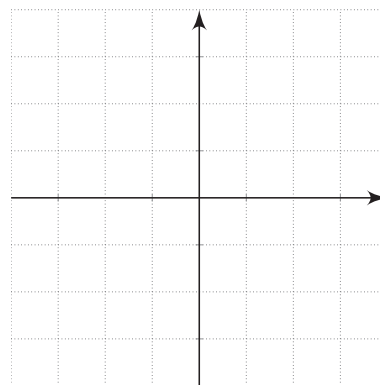
تعیین علامت چند جمله‌ای درجه اول

فعالیت

۱ نمودار خط $y = 2x - 6$ در شکل مقابل رسم شده است. با استفاده از آن، علامت y را در جدول زیر بنویسید.

x	$x < 3$	۳	$x > 3$
$y = 2x - 6$		۰	





۲ نمودار خط $y = -2x + 6$ را در شکل مقابل رسم کنید و جدول زیر که علامت y را برای x های مختلف تعیین می‌کند، کامل کنید.

x	$x < \dots$	$\dots$	$x > \dots$
$y = -2x + 6$		°	

۳ در دو قسمت بالا علامت عددی که ضریب x است، چه تفاوتی در جدول تعیین علامت این خطوط ایجاد کرده است؟

۴ نشان دهید که علامت عبارت $y = ax + b$ ، برای x های مختلف از جدول زیر تعیین می‌شود.

x	$x < -\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$x > -\frac{b}{a}$
$y = ax + b$	مخالف علامت a	°	موافق علامت a

مثال

عبارت $y = 5x - 2$ را تعیین علامت می‌کنیم.
 ریشه عبارت $5x - 2$ از معادله $5x - 2 = 0$ به دست می‌آید که برابر $x = \frac{2}{5}$ است.
 با توجه به اینکه علامت ضریب x ؛ یعنی $a = 5$ ، مثبت است، طبق جدول بالا، جدول تعیین علامت به صورت زیر است:

x	$x < \frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$x > \frac{2}{5}$
$y = 5x - 2$	-	°	+

مقدار y را برای $x = 3$ و $x = -1$ به دست آورید و صحت علامت اعداد به دست آمده را با جدول بالا بررسی کنید.

علامت عبارت $A = (2x-1)(3-x)$ را برای x های مختلف تعیین می کنیم.
جدول تعیین علامت برای هر کدام از عبارت های $2x-1$ و $3-x$ به صورت زیر است:

x	$x < 3$	3	$x > 3$
$3-x$	+	°	-

x	$x < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$x > \frac{1}{2}$
$2x-1$	-	°	+

اطلاعات این دو جدول را در یک جدول به صورت زیر می نویسیم:

x	$x < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < x < 3$	3	$x > 3$
$2x-1$	-	°	+		+
$3-x$	+		+	°	-

بنابراین در سه ناحیه بالا که با رنگ های مختلف نشان داده شده، علامت هر کدام از این دو عبارت مشخص شده است. مثلاً برای $x > 3$ ، عبارت $2x-1$ ، مثبت است؛ ولی $3-x$ منفی می باشد، پس علامت عبارت حاصل ضرب آنها، منفی خواهد بود. با بحث مشابه، برای دو ناحیه دیگر، جدول تعیین علامت $A = (2x-1)(3-x)$ به صورت زیر است^۱.

x	$\frac{1}{2}$	3
$2x-1$	-	°
$3-x$	+	°
A	-	°

دقت کنید که روی ستون ها نیز قاعده ضرب انجام شده است.
مقدار A را برای $x = 4$ و $x = 0$ به دست آورید و صحت علامت مقادیر به دست آمده را با جدول بالا بررسی کنید.

کار در کلاس

هر یک از عبارت های زیر را تعیین علامت کنید.

ب $B = (2x-3)^2$

الف $A = (3x+1)(x-2)$

ت $D = \frac{x-1}{5-2x}$

پ $C = x^2(7-x)$

۱- از نوشتن حدود x در جدول تعیین علامت، صرف نظر می کنیم.
۲- تقسیم دو علامت با ضرب آنها نتیجه مشابهی دارد. همچنین حاصل $\frac{a}{b}$ قابل محاسبه نیست و به آن تعریف نشده می گوئیم. ($a \in \mathbb{R}$)

تعیین علامت چندجمله‌ای درجه دوم

چند جمله‌ای درجه دوم $P(x) = ax^2 + bx + c$ را در نظر می‌گیریم که در آن a, b, c اعداد حقیقی‌اند و $a \neq 0$ است. برای حل معادله $P(x) = 0$ به شیوه مربع کامل، $P(x)$ را به شکل روبه‌رو می‌نویسیم.

$$P(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

که در آن، $\Delta = b^2 - 4ac$ و می‌دانیم که تعداد ریشه‌های معادله $P(x) = 0$ به علامت Δ بستگی دارد. با انجام فعالیت زیر علامت $P(x)$ را در حالت‌های مختلف به دست می‌آوریم.

فعالیت

۱ فرض کنید که معادله $P(x) = 0$ ، دو ریشه متمایز x_1 و x_2 ($x_1 < x_2$) داشته و به شکل $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ تجزیه شده باشد. با تکمیل جدول زیر، علامت $P(x)$ را برای x ‌های مختلف تعیین کنید.

x	x_1	x_2
$x - x_1$	-	+
$x - x_2$	...	...
$(x - x_1)(x - x_2)$	...	...
$P(x)$	...	...

۲ اگر معادله $P(x) = 0$ ریشه مضاعف برابر با x_1 داشته باشد، می‌توانیم $P(x)$ را به شکل $P(x) = a(x - x_1)^2$ بنویسیم. با تکمیل جدول زیر، علامت $P(x)$ را برای x ‌های مختلف تعیین کنید.

x	x_1
$(x - x_1)^2$	...
$P(x)$	...

۳ اکنون فرض کنید $\Delta < 0$ باشد، در این صورت معادله $P(x) = 0$ ریشه حقیقی ندارد. با توجه به اینکه $P(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$ علامت $P(x)$ را در جدول زیر تعیین کنید.

x	برای هر $x \in \mathbb{R}$
$P(x)$	...

۴ با توجه به قسمت بالا، مشخص کنید اگر $P(x)$ برای هر $x \in \mathbb{R}$ ، مثبت باشد، a و Δ چه علامتی دارند؟ برای وقتی که $P(x)$ منفی است، نیز علامت a و Δ را تعیین کنید.

مثال

عبارت $A = 2x^2 - x - 3$ را تعیین علامت می‌کنیم. ابتدا ریشه‌های معادله $A = 0$ را در صورت وجود، به دست می‌آوریم.

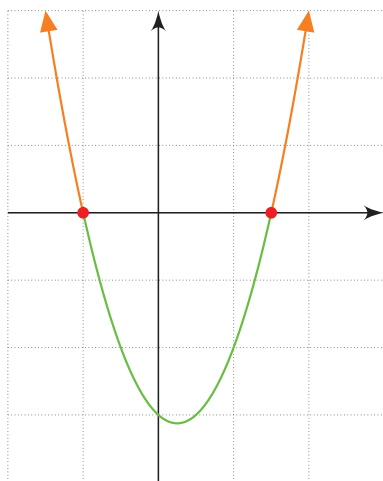
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(2)(-3) = 1 + 24 = 25$$

پس معادله $A = 0$ دو ریشه متمایز به صورت زیر دارد:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+5}{4} = \frac{3}{2}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-5}{4} = -1$$

با توجه به اینکه $a = 2$ است، بنابراین علامت $P(x)$ طبق فعالیت بالا به صورت زیر مشخص می‌شود:

x	-1		$\frac{3}{2}$	
P(x)	+	o	-	+



نمودار سهمی $y = 2x^2 - x - 3$ در شکل مقابل رسم شده است. به کمک نمودار نیز به سادگی می‌توان علامت y را برای x های مختلف تعیین کرد. برای $x > \frac{3}{2}$ و $x < -1$ ، نمودار بالای محور x هاست؛ پس y علامت مثبت دارد و برای $-1 < x < \frac{3}{2}$ ، نمودار پایین محور x هاست؛ پس علامت y منفی است.

مثال

عبارت $P(x) = \frac{x(x-3)^2}{x^2+x-2}$ را تعیین علامت می‌کنیم.

هریک از عبارت‌های موجود در صورت و مخرج را تعیین علامت می‌کنیم و نتایج را در یک جدول می‌نویسیم.

$$\begin{cases} x = 0 \\ (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x-3=0 \Rightarrow x=3 \\ x^2+x-2=0 \Rightarrow (x+2)(x-1)=0 \Rightarrow x=-2 \text{ یا } x=1 \end{cases}$$

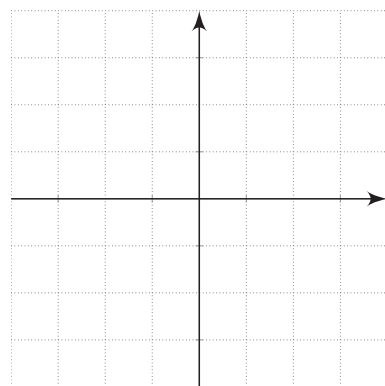
x	-2	o	1	3
x	-	-	+	+
$(x-3)^2$	+	+	+	+
x^2+x-2	+	-	-	+
P(x)	-	+	-	+

تعریف نشده

تعریف نشده

کار در کلاس

۱ چند جمله‌ای $y = -x^2 + x + 2$ را با محاسبه ریشه‌ها، در یک جدول تعیین علامت کنید؛ سپس با رسم آن، صحت علامت‌های به دست آمده در جدول را با نمودار، بررسی کنید.



۲ عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

$$B = \frac{-x^2 + 6x - 9}{x^2 + x + 3} \quad (\text{ب})$$

$$A = (x^2 - 9)(3x - 1) \quad (\text{الف})$$

نامعادله

در سال گذشته با مفهوم نامعادله آشنا شده‌اید. اگر A و B دو عبارت جبری باشند، نامعادله‌هایی که با این دو عبارت ساخته می‌شوند، به صورت زیرند:

نامعادله	می‌خوانیم
$A < B$	A کوچک‌تر از B است.
$A \leq B$	A کوچک‌تر یا مساوی B است.
$A > B$	A بزرگ‌تر از B است.
$A \geq B$	A بزرگ‌تر یا مساوی B است.

برای حل یک نامعادله می‌توانیم از خواص زیر استفاده کنیم:

۱- خاصیت جمع:

برای عبارت‌های جبری A ، B و C ، اگر $A < B$ سپس $A + C < B + C$.

۲- خاصیت ضرب

الف) اگر $C > 0$ و $A > B$ سپس $AC > BC$.

ب) اگر $C < 0$ و $A > B$ سپس $AC < BC$.

نامعادله $5x - 1 \geq 3x - 7$ را حل می‌کنیم.

$$5x - 1 \geq 3x - 7$$

$$5x - 1 - 3x \geq 3x - 7 - 3x$$

به دو طرف نامعادله، $-3x$ را اضافه می‌کنیم.

$$2x - 1 \geq -7$$

$$2x \geq -6$$

دو طرف نامعادله را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم.

$$x \geq -3$$

بنابراین مجموعه جواب این نامعادله عبارت است از $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\}$ که با نماد بازه به شکل $[-3, +\infty)$ نوشته می‌شود. نمایش هندسی این مجموعه به صورت زیر است:

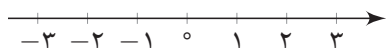


فعالیت

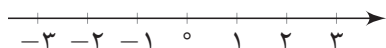
فرض کنید x متغیری باشد که همزمان در دو نامعادله زیر صدق می‌کند:

$$-2 < 3x - 1, \quad 3x - 1 \leq 8$$

۱ هر کدام از نامعادله‌های بالا را حل کنید و مجموعه جواب‌های به‌دست آمده را روی محور مقابل آنها رسم کنید.

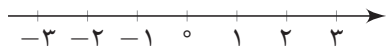


$$-2 < 3x - 1 \Rightarrow \dots\dots\dots$$



$$3x - 1 \leq 8 \Rightarrow \dots\dots\dots$$

به‌خاطر وجود «و» بین دو نامعادله، اشتراک مجموعه جواب‌های به‌دست آمده را مشخص و آن را روی محور مقابل رسم کنید.



۲ می‌توانیم دو نامعادله فوق را ترکیب کنیم و به شکل یک نامعادله دوگانه به‌صورت $-2 < 3x - 1 \leq 8$ بنویسیم. از خواص جمع و ضرب نامساوی‌ها استفاده کنید و این نامعادله دوگانه را حل کنید:

$$-2 < 3x - 1 \leq 8 \quad \text{به دو نامعادله } +1 \text{ را اضافه می‌کنیم.}$$

$$\dots < 3x \leq 9 \quad \text{دو نامعادله را در } \frac{1}{3} \text{ ضرب می‌کنیم.}$$

$$\dots < x \leq \dots$$

جواب به‌دست آمده از این روش را با جوابی که در قسمت بالا به آن رسیده‌اید، مقایسه کنید. نامعادله دوگانه فوق را به‌صورت دستگاه نامعادله‌های زیر نیز نشان می‌دهیم:

$$\begin{cases} 3x - 1 > -2 \\ 3x - 1 \leq 8 \end{cases}$$

کار در کلاس

حداقل و حداکثر دمای یک شهر در یک روز، ۱۵ و ۲۵ درجه سانتی گراد و رابطه‌ای که درجه فارنهایت (F) را به سانتی گراد (C) تبدیل می‌کند، به صورت $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ است. حداقل و حداکثر دمای این شهر را برحسب فارنهایت تعیین کنید. (قرار دهید $15 \leq C \leq 25$ ؛ سپس از رابطه داده شده، C را برحسب F بنویسید و نامعادله دوگانه به دست آمده را حل کنید.)

فعالیت

سهمی $y = x^2 - 2x - 3$ را در نظر بگیرید که نمودار آن در شکل مقابل رسم شده است.

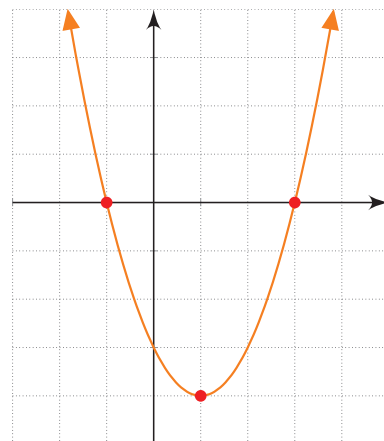
الف به کمک نمودار رسم شده، برای چه مقادیری از x، نمودار سهمی، پایین محور x هاست؟

ب جدول تعیین علامت عبارت $y = x^2 - 2x - 3$ را رسم کنید و مشخص کنید برای چه

مقادیری از x، علامت y منفی است؟

پ نشان دهید که از مجموعه جواب‌های به دست آمده در هر یک از قسمت‌های الف و ب

می‌توان برای حل نامعادله $x^2 - 2x - 3 < 0$ استفاده کرد.



کار در کلاس

هریک از نامعادلات زیر را به دو روش هندسی و جدول تعیین علامت، حل کنید.

الف $x^2 \leq 4$

ب $3x^2 - x - 2 \geq 0$

مثال

برای چه مقادیری از m، عبارت $y = x^2 + mx + 1$ همواره مثبت است؟

حل: از درس قبل به یاد داریم، برای اینکه عبارت درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ همواره مقدار

مثبت داشته باشد، باید $\Delta < 0$ و $a > 0$ باشد. در این عبارت، $a = 1$ و $\Delta = m^2 - 4$ است؛

بنابراین $m^2 - 4 < 0$ است.

جدول تعیین علامت، برای $m^2 - 4$ به صورت زیر است:

m	-2	2
$m^2 - 4$	+	-

بنابراین برای اینکه $m^2 - 4$ منفی باشد، باید $-2 < m < 2$.

نامعادله $\frac{x^2-9}{2x+1} \geq 0$ را حل می‌کنیم.

برای حل این نامعادله، عبارت $\frac{x^2-9}{2x+1}$ را تعیین علامت می‌کنیم. برای این کار ریشه‌های صورت و مخرج این کسر را پیدا می‌کنیم. ریشه‌های معادله $x^2-9=0$ ، اعداد ± 3 هستند و ریشه معادله $2x+1=0$ ، عدد $-\frac{1}{2}$ است. بنابراین، جدول تعیین علامت این کسر به صورت زیر است.

x	-3	$-\frac{1}{2}$	3
x^2-9	+	-	+
$2x+1$	-	+	+
$\frac{x^2-9}{2x+1}$	-	+	+

تعریف نشده

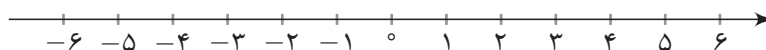
بنابراین اگر $-\frac{1}{2} \leq x < 3$ و یا $x \geq 3$ ، عبارت $\frac{x^2-9}{2x+1}$ بزرگ‌تر یا مساوی صفر است؛ پس مجموعه جواب این نامعادله عبارت است از: $[-\frac{1}{2}, 3) \cup [3, +\infty)$.

نامعادله‌های قدر مطلق

می‌دانیم که $|x|$ همان فاصله x از مبدأ، روی خط اعداد حقیقی است. مثلاً $|3|=3$ و $|-3|=3$ زیرا فاصله هر دو عدد ۳ و -۳ از مبدأ برابر ۳ است.

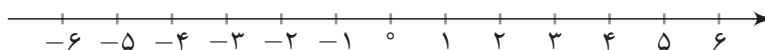
فعالیت

۱ نامعادله $|x| \leq 3$ را در نظر بگیرید. مجموعه جواب این نامعادله، شامل اعداد حقیقی x است که فاصله آنها از مبدأ کوچک‌تر یا مساوی ۳ باشد. این اعداد را روی محور زیر نمایش دهید.



مجموعه مقادیری را که در نمودار بالا مشخص کرده‌اید، به صورت بازه بنویسید.

۲ نامعادله $|x| \geq 3$ را در نظر بگیرید. مجموعه جواب این نامعادله، شامل اعداد حقیقی x است که فاصله آنها از مبدأ بزرگ‌تر یا مساوی ۳ باشند. این اعداد را روی محور زیر نشان دهید.



مجموعه این مقادیر را که در نمودار بالا مشخص کرده‌اید، به صورت بازه بنویسید.

۳ با استفاده از مراحل بالا، جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$$\begin{aligned} \dots &= \text{مجموعه جواب (به شکل بازه)} \Rightarrow \dots \leq x \leq \dots \Rightarrow |x| \leq 3 \\ \dots &= \text{مجموعه جواب (به شکل بازه)} \Rightarrow x \leq \dots \text{ یا } x \geq \dots \Rightarrow |x| \geq 3 \end{aligned}$$

فرض کنیم a یک عدد حقیقی مثبت و u یک عبارت جبری باشد. در این صورت^۱

۱- اگر $|u| \leq a$ آن گاه $-a \leq u \leq a$.

۲- اگر $|u| \geq a$ آن گاه $u \geq a$ یا $u \leq -a$.

مثال

نامعادله‌های زیر را حل می‌کنیم.

الف $|x-3| \leq 2$

ب $|2x-1| > 5$

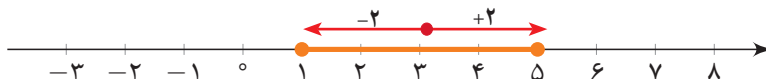
برای حل نامعادله الف، با استفاده از خواص قدر مطلق آن را به یک نامعادله دوگانه تبدیل می‌کنیم: $-2 \leq x-3 \leq 2$ اکنون داریم:

$$-2 \leq x-3 \leq 2 \Rightarrow 1 \leq x \leq 5.$$

پس مجموعه جواب این نامعادله، بازه $[1, 5]$ است و نمایش هندسی آن به صورت زیر است.



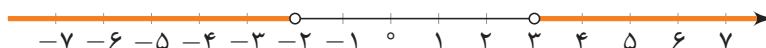
برای حل نامعادله $|x-3| \leq 2$ به روش هندسی باید نقاطی مانند x را روی محور پیدا کنیم که فاصله آنها از نقطه ۳، حداکثر دو باشد. بنابراین بازه $[1, 5]$ ، مطابق شکل زیر به دست می‌آید.



برای حل نامعادله ب نیز از خواص قدر مطلق استفاده می‌کنیم و داریم:

$$|2x-1| > 5 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1 > 5 \Rightarrow 2x > 6 \Rightarrow x > 3 \\ 2x-1 < -5 \Rightarrow 2x < -4 \Rightarrow x < -2 \end{cases}$$

بنابراین مجموعه جواب این نامعادله عبارت است از: $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$ و نمایش هندسی آن جواب نیز به صورت زیر است.



۱- در هریک از این نامعادله‌ها، اگر علامت مساوی وجود نداشته باشد، هیچ کدام از جواب‌ها نیز علامت مساوی ندارند.

۱ در هریک از نامعادله‌های زیر، مجموعه جواب را با نماد بازه به دست آورید؛ سپس آن را روی محور نشان دهید.

الف) $|\frac{x}{3} + 1| < \frac{2}{3}$

ب) $|5 - 2x| \geq 1$

۲ یک نامعادله قدر مطلق بنویسید که مجموعه جواب آن بازه $(1, 9)$ باشد.



۳ یک نامعادله قدر مطلق بنویسید که مجموعه جواب آن $(-\infty, 3] \cup [6, +\infty)$ باشد.



تمرین

۱ در هریک از نامعادله‌های زیر، مجموعه جواب را به شکل بازه بنویسید.

الف) $1 < 2x - 3 \leq 3$

ث) $x(x^2 + 4) < 0$

ب) $x + 1 \leq 5 - x < 2x + 3$

ج) $\frac{x^3 - x}{x^2 - 2x + 2} \leq 0$

پ) $-2 < \frac{5-x}{2} < 0$

چ) $|7 - 2x| < 1$

ت) $\frac{4-2x}{3x+1} \geq 0$

ح) $\left| \frac{x-1}{2} - 1 \right| \geq 3$

۲ به ازای چه مقادیری از k ، عبارت $A = x^2 + 3x + k$ همواره مثبت است؟

۳ به ازای چه مقادیری از m ، سهمی $y = mx^2 - mx - 1$ همواره پایین محور x هاست؟

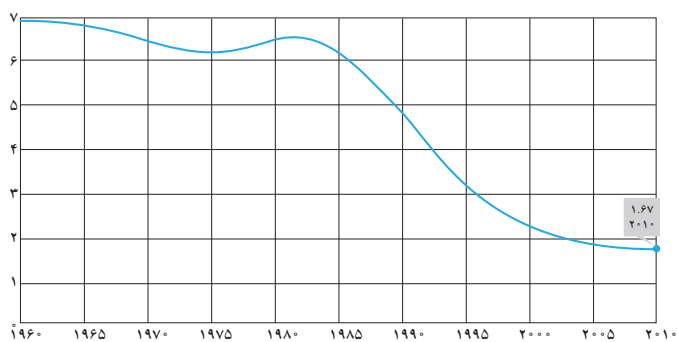
۴ یک جسم از بالای یک ساختمان که ۱۳ متر ارتفاع دارد، به هوا پرتاب می‌شود. اگر ارتفاع این جسم از سطح زمین در ثانیه t از رابطه $h = -5t^2 + 18t + 13$ محاسبه شود، در چه فاصله زمانی، ارتفاع توپ از سطح زمین بیشتر از ۱۳ متر خواهد بود؟

۵ تعداد ضربان قلب، x دقیقه $(0 \leq x \leq 8)$ پس از پایان یک کار سنگین بدنی، طبق رابطه $y = \frac{15}{8}x^2 - 30x + 200$ به دست می‌آید. در چه زمان‌هایی پس از یک کار سنگین بدنی، تعداد ضربان قلب از ۱۱۰ بیشتر است؟ آیا تمام جواب‌های به دست آمده قابل قبول اند؟

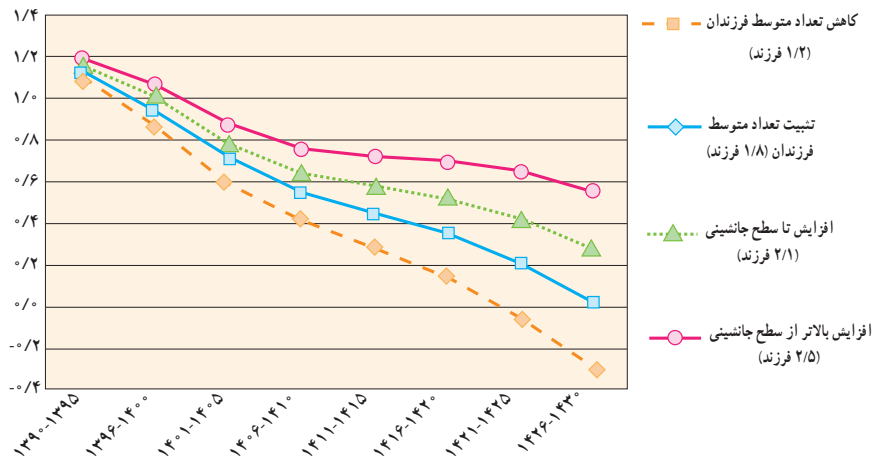


تابع یکی از مفاهیم مهم است که در ریاضیات و سایر علوم دارای کاربردهای فراوانی است. توابع به روش‌های گوناگونی نمایش داده می‌شوند. یکی از این روش‌ها استفاده از نمودارهاست. موضوعات متفاوتی به وسیله تابع قابل مدل‌سازی است. نمودار زیر روند کاهش متوسط تعداد فرزندان یک خانواده در کشورمان را نشان می‌دهد. نمودار بعدی جمعیت کل کشور را در چهار وضعیت مختلف پیش‌بینی می‌کند. کشور ما در معرض سالمند شدن می‌باشد. به‌طوری که اگر متوسط تعداد فرزندان یک خانواده تا سال ۱۴۳۰ میزان فعلی باشد در آن موقع، حدود ۳٪ جمعیت را افراد مسن تشکیل خواهند داد. کشور ما با نسبت سالمندی ۸٪ تا سال ۱۳۹۴ جزء جوان‌ترین کشورها بوده است. همچنین با ادامه روند فعلی تغییرات جمعیت در یک دوره ۳۰ ساله، رشد جمعیت به صفر خواهد رسید و پس از آن رشد جمعیت کشور منفی خواهد شد. سالمندی جمعیت و منفی شدن رشد جمعیت، پیامدهای ناگواری را در پی دارد.

نمودار روند کاهش متوسط تعداد فرزندان یک خانواده در ایران



نمودار پیش‌بینی رشد جمعیت کل کشور در دوره‌های پنج ساله در چهار وضعیت مختلف
تعداد متوسط فرزندان تا افق ۱۴۳۰ شمسی



درس اول مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن

درس دوم دامنه و برد توابع

درس سوم انواع تابع

درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی های آن



بسیاری از پدیده های پیرامون ما به نوعی با هم ارتباط دارند. یک نوع خاص از این ارتباط در موارد زیادی مشاهده می شود. به مثال های زیر توجه کنید :

دمایی که به ساعت معینی در یک مکان نسبت داده می شود.

قیمتی که به اجناس یک فروشگاه نسبت داده می شود.

نمره هایی که به یک دانش آموز در دروس مختلف تعلق می گیرد.

عددی که به جمعیت شهرها نسبت داده می شود.

فعالیت ۱

در جدول های زیر مثال های بالا و مواردی دیگر به کمک جدول ارائه شده اند. جاهای خالی را پر کنید. جدول آخر را به سلیقه خودتان تکمیل کنید.

با توجه به جدول مشخص است که در یک زمان معین فقط یک دما را می توان به آن نسبت داد. درباره بقیه جدول ها مشابه این عبارت را بنویسید.

ساعت	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	
دما	۱۵	۱۶	۱۷	۱۷	۱۸	

به یک ساعت معین فقط یک دما را می توان نسبت داد؛ یعنی یک ساعت مشخص دو دمای متفاوت ندارد.

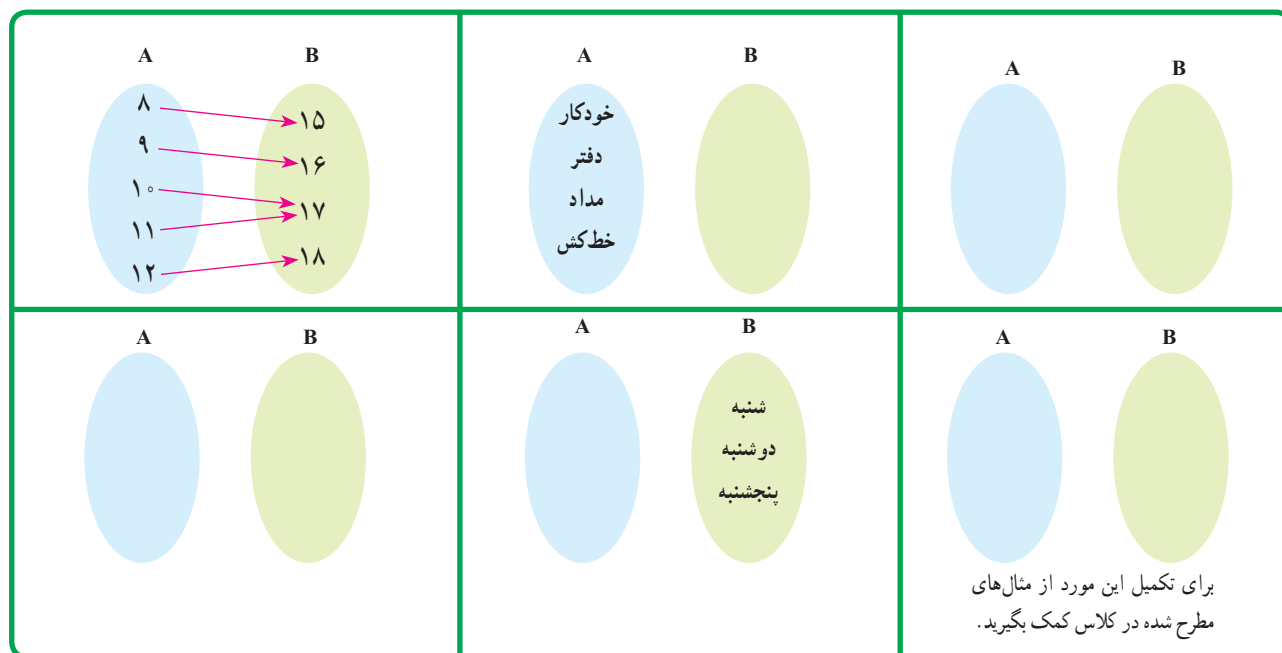
کالا	خودکار	دفتر	مداد	خط کش	
قیمت (تومان)	۱۵۰۰	۳۰۰۰	۱۰۰۰	۱۵۰۰	

درس	ریاضی	فیزیک	شیمی	ادبیات	
نمره	۱۸	۱۶	۱۷	۱۸	

فرد	امیدی	احسانی	کشاورز	رستگار	
روز تولد	شنبه	دوشنبه	شنبه	پنجشنبه	

یک شخص معین دو روز تولد متفاوت ندارد.

جدول های فعالیت ۱ را می توان به کمک مجموعه ها و پیکان هایی که اعضای آنها را به هم **مربوط** می کنند، مشخص کرد. به این شیوه نمایش، نمودارهای پیکانی می گوئیم. یک نمونه کامل شده است. بقیه را شما کامل کنید.



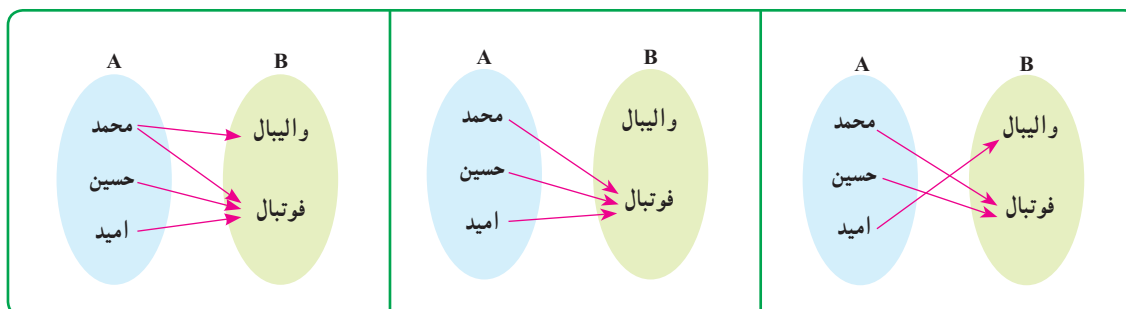
توجه دارید که در رابطه های بالا، از هر عضو مجموعه A دقیقاً یک پیکان خارج شده است. این گونه رابطه بین دو مجموعه را یک «تابع» می نامند.

یک تابع از مجموعه A به مجموعه B، رابطه ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می شود.

در فعالیت ۱، همه مثال های ارائه شده تابع هایی هستند که به صورت جدول نمایش داده شده اند.

کار در کلاس

۱ مجموعه A شامل سه دانش آموز به نام های محمد، حسین و امید و مجموعه B شامل دو رشته ورزشی است که دانش آموزان می توانند انتخاب کنند. کدام یک از نمودارهای پیکانی داده شده تابع است و کدام یک تابع نیست؟

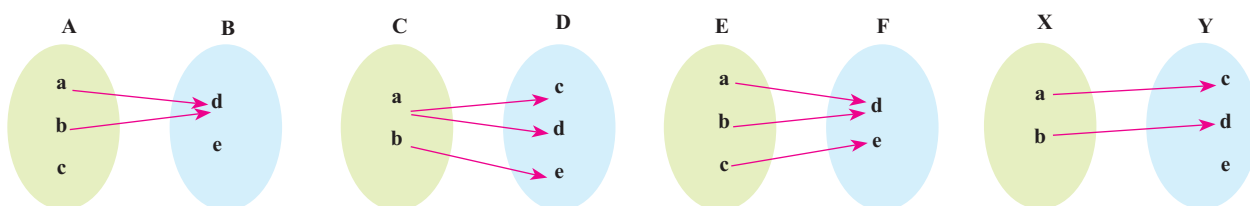


درس اول: مفهوم تابع و بازتاب‌های آن

۲ از مجموعه A به مجموعه B نمودار پیکانی را طوری رسم کنید که یک تابع را نمایش دهد. از مجموعه X به مجموعه Y این کار را به گونه‌ای انجام دهید که حاصل یک تابع نباشد. پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.



- ۳ الف) آیا رابطه‌ای که به افراد سن آنها را نسبت می‌دهد، یک تابع است؟ رابطه‌ای که به افراد وزن آنها را نسبت می‌دهد، چطور؟
ب) آیا رابطه‌ای که به افراد غذای مورد علاقه آنها را نسبت می‌دهد، یک تابع است؟ توضیح دهید.
- ۴ کدام یک از نمودارهای پیکانی زیر یک تابع است؟



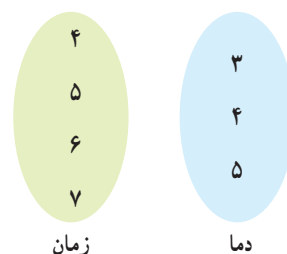
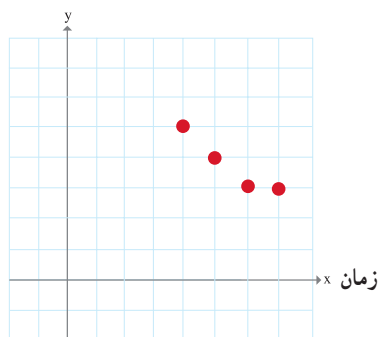
فعالیت

نمایش تابع به صورت زوج‌های مرتب و نمودار مختصاتی

نمودار زیر، دمای هوا را در چهار ساعت متفاوت در اردبیل نشان می‌دهد. رابطه بین زمان و دما را به صورت نمودار پیکانی نمایش دهید و معلوم کنید که آیا این رابطه یک تابع است؟ جدول را هم کامل کنید.



دما (سانتی‌گراد)



ساعت	۴	۵	۶	۷
دما	۵	۴		

اگر در نمودار بالا محور افقی را محور طول و محور عمودی را محور عرض در نظر بگیریم، مختصات هر یک از نقاط داده شده را می‌توان با یک «زوج» از اعداد به صورت زیر نمایش داد:

$(4, 5), (5, 4), (6, 3), (7, 3)$

ترتیب نوشتن اعداد در هر زوج مهم است. مثلاً زوج‌های (۴, ۵) و (۵, ۴) برابر نیستند و دو نقطه متفاوت در نمودار را نشان می‌دهند. به همین دلیل به هر یک از زوج‌های بالا یک «زوج مرتب» می‌گوییم.

اگر همه زوج‌های مرتب بالا را در مجموعه‌ای قرار دهیم، یک نمایش دیگر برای رابطه ارائه شده بین زمان و دما به دست می‌آید که به آن نمایش زوج مرتبی رابطه داده شده می‌گویند. برای نام گذاری این مجموعه جدید از حروفی مانند f و g استفاده می‌کنیم.

$$f = \{(4,5), (5,4), (6,3), (7,3)\}$$

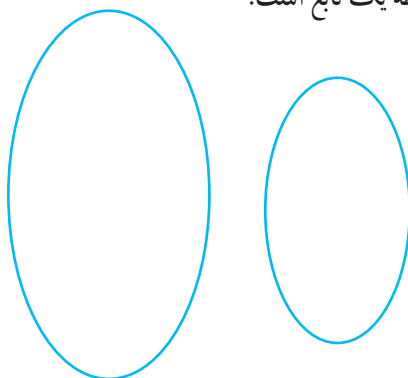
در هر زوج مرتب عضو اول را «مؤلفه اول» و عضو دوم را «مؤلفه دوم» می‌نامیم. به طور مثال در زوج مرتب (۳ و ۶)، مؤلفه اول ۶ و مؤلفه دوم ۳ است. مجموعه f یک تابع است. برای ساعت‌های دیگر موجود در نمودار دمایی را به زمان نسبت دهید و نمودار را به صورت زوج مرتب نمایش دهید.

کار در کلاس

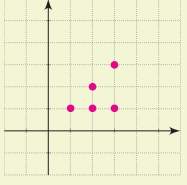
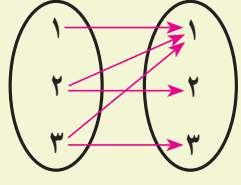
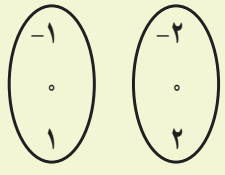
۱ نام شهرهای تهران، مشهد، اصفهان، شیراز، تبریز، اهواز و کرمان در یک سطر جدول زیر نوشته شده‌اند. در سطر دیگر، جمعیت آن شهرها را به طور تقریبی بنویسید (جمعیت دقیق لازم نیست).

شهر	تهران	مشهد	اصفهان	شیراز	تبریز	اهواز	کرمان
جمعیت							

رابطه بالا را به صورت پیکانی و زوج مرتب نمایش دهید. آیا این رابطه یک تابع است؟



۲ در هر سطر جدول زیر نمایش‌های مختلف یک رابطه داده شده است. جاهای خالی جدول را کامل و معلوم کنید که آیا این رابطه یک تابع است؟ ردیف آخر را به دلخواه خودتان کامل کنید.

جدول یا نمودار	نمودار پیکانی	مجموعه زوج‌های مرتب	توصیف رابطه
		$\{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3)\}$	به هر عدد طبیعی کمتر از ۴ مقسوم‌علیه‌های آن را نسبت می‌دهد.
		$\{(2, 4), (3, 9), (4, 16)\}$	
			به اعداد ۴ و ۷ ریشه‌های دوم آنها را نسبت می‌دهد.
			

۳ الف) کدام یک از رابطه‌های زیر تابع است؟ چرا؟

$$g = \{(1, 5), (2, 9), (2, 5), (3, 10)\}$$

$$f = \{(1, 5), (2, 9), (3, 10)\}$$

ب) با تکمیل جمله زیر برای تشخیص تابع بودن یک رابطه، هنگامی که رابطه به صورت زوج مرتبی ارائه می‌شود، معیاری به دست آورید:

اگر یک رابطه به صورت مجموعه زوج‌های مرتب داده شده باشد، هنگامی این رابطه یک تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن



- ۱ کدام یک از روابط زیر یک تابع را معلوم می کند؟ توضیح دهید.
- (الف) رابطه ای که به ضلع یک مربع، محیط مربع را نسبت می دهد.
- (ب) رابطه ای که به هر فرد، دمای بدن او را در یک زمان معین نسبت می دهد.
- (ج) رابطه ای که به هر فرد، گروه خونی او را نسبت می دهد.
- (د) رابطه ای که به هر دانش آموز، دوستان او را نسبت می دهد.
- (ه) رابطه ای که به هر عدد، ریشه های دوم آن عدد را نسبت می دهد.
- (و) رابطه ای که به هر عدد، ریشه سوم آن را نسبت می دهد.

- ۲ مجموعه های $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{1, 2\}$ داده شده اند.
- (الف) به کمک نمودار پیکانی دو رابطه از A به B ارائه کنید که تابع باشند.
- (ب) دو رابطه ارائه کنید که تابع نباشند.
- (ج) چهار رابطه به دست آمده را به کمک زوج های مرتب و نمودار نمایش دهید.

- ۳ کدام یک از مجموعه های زیر یک تابع است؟

$$f = \{(2, 1), (3, -5), (3, 7)\}$$

$$h = \{(2, 3), (3, 2), (1, 1)\}$$

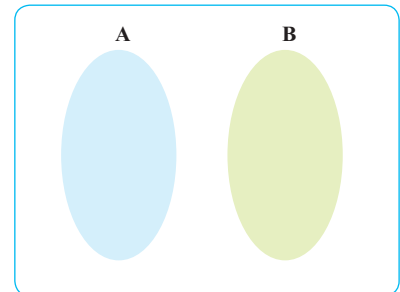
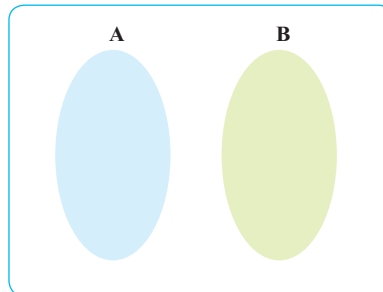
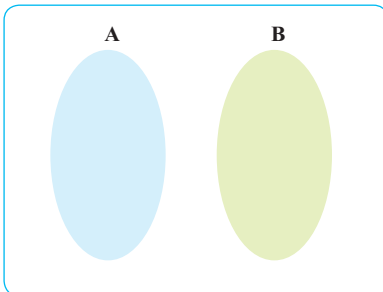
$$r = \{(2, 0), (-7, 0)\}$$

$$g = \{(0, 1), (\frac{3}{5}, 1), (-5, 1), (8, 1)\}$$

$$k = \{(2, 5)\}$$

$$l = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), \dots\}$$

- ۴ A و B مجموعه هایی غیر عددی اند، در شکل زیر در A و B اعضای دلخواه بگذارید و یک تابع از A به B به کمک نمودار پیکانی ارائه کنید. سعی کنید لااقل سه تابع مختلف بنویسید. پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.



درس دوم: دامنه و برد تابع

فعالیت

در جدول زیر رابطه بین تعدادی چند ضلعی و مجموع زوایای داخلی آنها داده شده است. جدول را کامل کنید.

پنج ضلعی	لوزی	مربع	مثلث	چندضلعی
			180°	مجموع زوایای داخلی (درجه)

این رابطه را به صورت زوج مرتبی نمایش دهید.

$$f = \{ (\text{پنج ضلعی} , \quad) , (\text{لوزی} , \quad) , (\text{مربع} , \quad) , (\text{مثلث} , 180^\circ) \}$$

چرا f یک تابع است؟

مجموعه همه مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب تشکیل دهنده هر تابع را «دامنه» و مجموعه همه مؤلفه‌های دوم را «برد» آن تابع می‌نامند. در فعالیت بالا:

$$f \text{ دامنه} = \{ \text{پنج ضلعی} , \text{لوزی} , \text{مربع} , \text{مثلث} \}$$

$$f \text{ برد} = \{ 180^\circ , 360^\circ , 540^\circ \}$$

کاردر کلاس

۱ در جدول زیر رابطه بین ضلع یک مربع و محیط آن داده شده است. جدول را کامل کنید.

طول ضلع	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{3}{2}$	۲		
محیط	۲	۴				۲۰

نمایش رابطه داده شده را به صورت مجموعه زوج‌های مرتب بنویسید. چرا این رابطه تابع است؟ دامنه و برد این تابع را بنویسید.

۲ الف) تابعی مثال بزنید که دامنه آن سه عضو و برد آن دو عضو داشته باشد.

ب) آیا تابعی وجود دارد که دامنه آن دو عضو و برد آن سه عضو داشته باشد؟

۳ اگر f تابعی از مجموعه A به مجموعه B باشد، می‌دانیم که دامنه f همان مجموعه A است. آیا همیشه برد تابع f با مجموعه B برابر است؟ مثال بزنید.

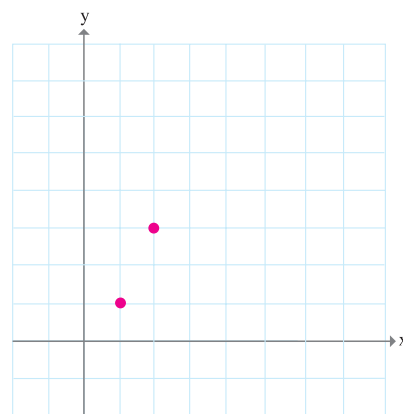
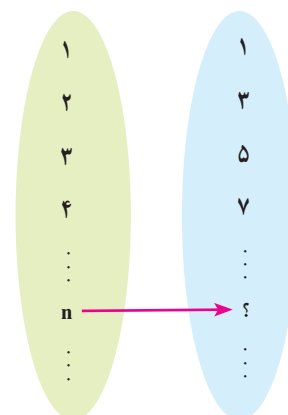
فعالیت

دنباله شکل‌های زیر را در نظر بگیرید :



جدول را کامل کنید.

شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵	۶	...	۱۰۰	...	n	...
تعداد دایره‌ها	۱	۳					...		...		...



چرا این جدول یک تابع را نشان می‌دهد؟ نمایش زوج مرتبی این تابع :
 $f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), \dots, (100, \dots), \dots, (n, \dots), \dots\}$
 نمودار پیکانی و نمودار مختصاتی این تابع را رسم کنید.
 دامنه و برد این تابع را بنویسید. دامنه و برد چه مجموعه‌هایی هستند؟ نام ببرید.

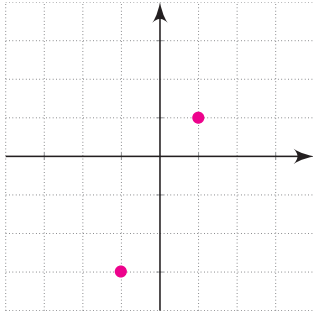
همان‌گونه که از نمایش‌های مختلف تابع دیده می‌شود، عضو ۱ از دامنه به ۱ از برد و عضو ۲ از دامنه به ۳ از برد نظیر می‌شود. به جای این می‌توان با یک قرارداد کار را ساده‌تر کرد. معمولاً می‌نویسند $f(1)=1$ و $f(2)=3$ و گفته می‌شود که مقدار تابع f در نقطه ۱ برابر ۱ است و مقدار تابع f در نقطه ۲ برابر ۳ است. به همین ترتیب می‌توان نوشت :
 $f(3)=5, f(4)=7, \dots, f(n)=2n-1, \dots$

رابطه بین دامنه و برد تابع f را می‌توان به صورت یک عبارت ریاضی به شکل $f(n)=2n-1$ نوشت که در آن n یک عدد طبیعی است. این گونه نمایش تابع را نمایش جبری می‌نامند. برای مشخص کردن تابع f به صورت جبری باید به دامنه و برد آن هم توجه کنیم. دامنه تابع f مجموعه اعداد طبیعی است.

در بسیاری از موقعیت‌ها کار با نمایش جبری یک تابع، ساده‌تر و مناسب‌تر از کار با دیگر نمایش‌های تابع است.

کاردر کلاس

اگر تابعی با نمایش جبری $f(n) = n^2 + 1$ داده شده باشد و دامنه آن $A = \{1, 2, 3, 4\}$ باشد، برد تابع f را به دست آورید.



جدول را کامل کنید و از آن برای رسم نمودار خط $y = 2x - 1$ استفاده کنید.

x	۱	۲	۳	-۱	۰			
y	۱	۳	۵	-۳				

آیا می‌توانید شباهت و تفاوت این جدول را با جدول فعالیت قبل نشان دهید؟ چرا این جدول هم یک تابع را نشان می‌دهد؟ این تابع را g بنامید.

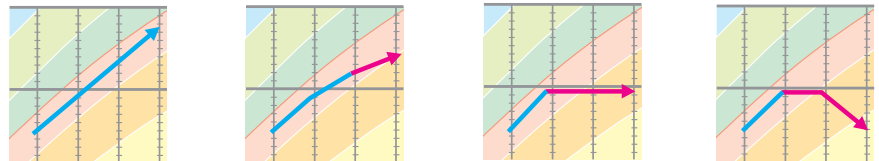
نمودار این تابع و تابع داده شده در فعالیت قبل چه تفاوتی با هم دارند؟ دامنه و برد این تابع را به دست آورید و با دامنه و برد تابع $f(n) = 2n - 1$ که در آن $n \in \mathbb{N}$ مقایسه کنید. جاهای خالی را کامل کنید.

$g(-\frac{1}{5}) =$ $g(0) =$ $g(\frac{2}{3}) =$ $g(\sqrt{5}) =$ $g(10) =$
 نمایش جبری تابع داده شده در این «کار در کلاس» را بنویسید. $g(x) = \dots\dots\dots$
 در اینجا x یک عدد $\dots\dots\dots$ است.

هر تابع که بتوان آن را به شکل $y = ax + b$ نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می‌شود.

فعالیت

هنگامی که پزشکان می‌خواهند دربارهٔ رشد یک کودک اظهار نظر کنند، نمودار وزن او را با نمودار شکل (۱) مقایسه می‌کنند. در مقایسهٔ نمودار وزن هر کودک با نمودار شکل (۱)، چهار وضعیت متفاوت ممکن است رخ دهد که در شکل (۲) نشان داده شده‌اند.



الف) رشد مطلوب

ب) کندی رشد

پ) توقف رشد

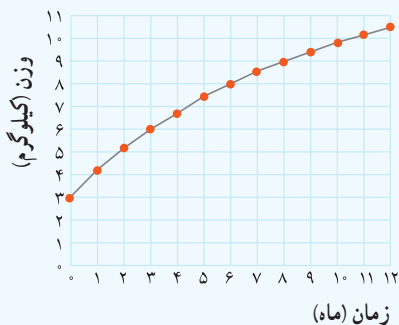
ت) افت رشد

شکل ۲

جدول زیر نشان دهندهٔ وزن یک کودک است که آن را پزشک (یا مرکز بهداشتی) در پایان هر ماه طی یک سال، ثبت کرده است. این جدول یک تابع را نشان می‌دهد.

زمان (ماه)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
وزن (کیلوگرم)	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{2}$	۵	۵	۵	$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{2}$	۸	$\frac{8}{5}$

شاید بیشتر شما نمودارهای وزن یا قد یک کودک را از بدو تولد تا هنگام ورود به مدرسه دیده باشید. شکل زیر نمودار تغییرات وزن یک کودک طبیعی را از هنگام تولد تا یک سالگی نشان می‌دهد. وزن یک کودک تابعی از زمان است.



شکل ۱- نمودار تغییرات در وزن یک کودک طبیعی

الف) به نظر شما در فاصله زمانی تولد تا سه ماهگی، رشد کودک با کدام یک از چهار وضعیت نشان داده شده در شکل (۲) مطابقت دارد؟

ب) در چه فاصله زمانی ای وزن او ثابت مانده است؟

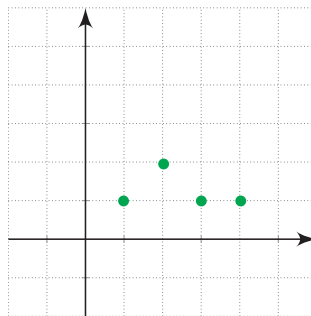
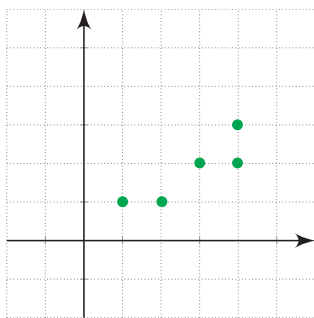
پ) اعداد داده شده در جدول را روی شکل (۱) مشخص کنید. نقاط به دست آمده را به یکدیگر وصل کنید تا نمودار جدیدی به دست آید. با مقایسه این نمودار با نمودار اصلی، رشد کودک از نظر وزن را در طی یک سال بررسی کنید.

وزن کودک در فاصله بین ماه‌ها اندازه‌گیری نشده بود؛ ولی به کمک نموداری که رسم کرده‌اید، می‌توانید وزن او را در فاصله بین ماه‌ها نیز به صورت تقریبی تعیین کنید.

ت) دامنه و برد این تابع را به دست آورید و نمودار پیکانی آن را نیز رسم کنید.

کار در کلاس

کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را نمایش می‌دهند؟ توضیح دهید.



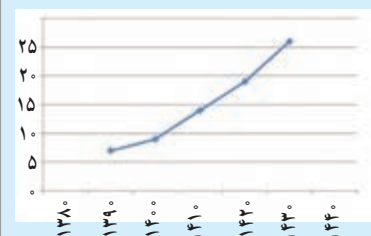
می‌توانید نمایش زوج مرتبی نمودارهای بالا را بنویسید و به کمک آن تابع بودن یا تابع نبودن آنها را معلوم کنید. دامنه و برد هر کدام را که تابع است، مشخص کنید.

با تکمیل جمله زیر معیاری برای تشخیص تابع بودن یک رابطه که به صورت نمودار ارائه می‌شود، به دست آورید.

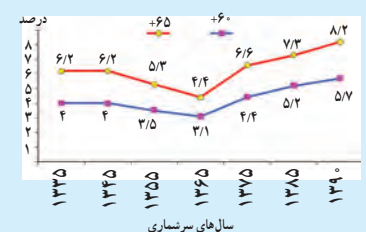
اگر نمودار یک رابطه داده شده باشد، هنگامی این نمودار تابع است که هر خط موازی محور عرض‌ها، نمودار را حداکثر در قطع کند.

از سال ۱۹۹۹، کمیسیون جمعیت و توسعه سازمان ملل شصت سالگی را به عنوان آستانه سالمندی در نظر گرفته است که هر روز افراد بیشتری در جهان به آن می‌رسند. منظور از سالمندی جمعیت، افزایش نسبت تعداد افراد ۶۰ ساله و بالاتر به ازای هر ۱۰۰ نفر جمعیت زیر ۱۵ سال است. طبق آمارهای سازمان ملل در سال ۲۰۱۲، در صورت تثبیت وضعیت حاضر، کشور ایران در سال ۲۰۵۰ میلادی (۱۴۳۰ شمسی) جزء پیرترین کشورها خواهد بود و حدود ۳۰٪ جمعیت را افراد مسن تشکیل خواهند داد. این در حالی است که در زمان انتشار این آمار (۲۰۱۲)، کشور ما با نسبت سالمندی ۸٪ جزء جوان‌ترین کشورها بوده است. نتایج پیش‌بینی‌های اخیر سازمان ملل در سال ۲۰۱۰ در مورد تحولات حجم جمعیت ایران تا ۱۰۰ سال آینده نشان می‌دهد که با ادامه روند کنونی سال ۱۴۸۰ جمعیت به حدود ۳۱ میلیون نفر با شاخص سالخوردگی ۴۷/۴ درصد کاهش خواهد یافت.

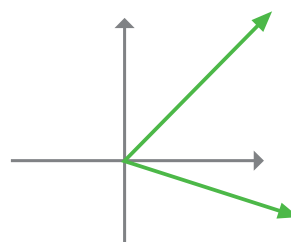
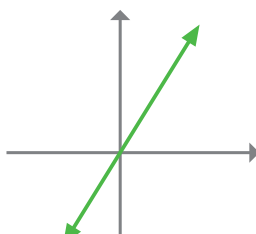
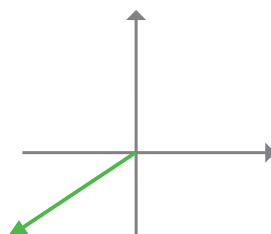
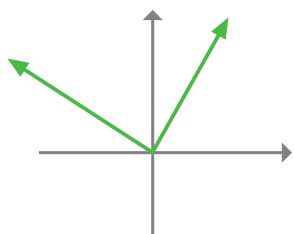
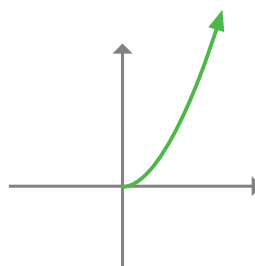
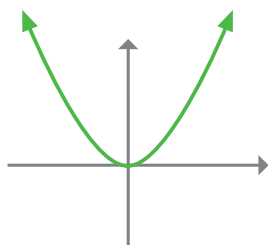
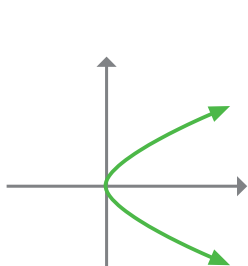
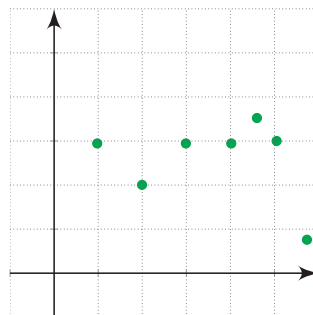
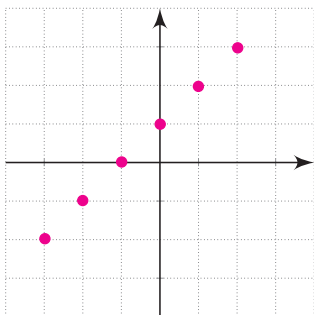
نمودار پیش‌بینی گروه سنی ۶۰ سال و بالاتر



نسبت جمعیت سالمند ایران در طی سال‌های سرشماری

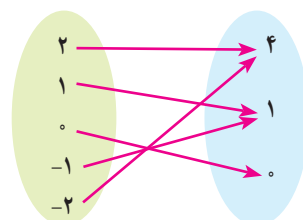
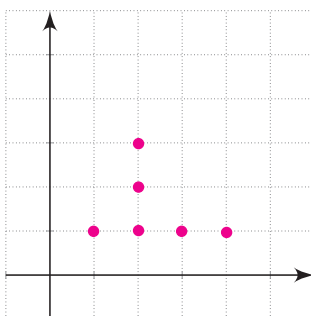
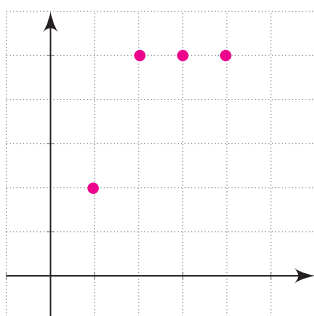


کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را نمایش می‌دهند؟



تمرین

۱ کدام یک تابع است؟
دامنه و برد هر تابع را معلوم کنید.



۲ تابعی مثال بزنید که :

(الف) دامنه آن تنها شامل دو عضو باشد.

(ب) برد آن تنها از یک عضو تشکیل شده باشد.

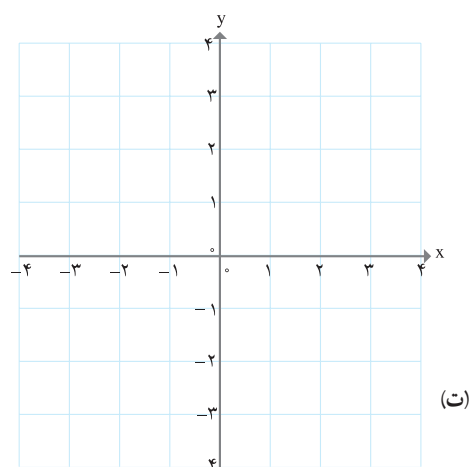
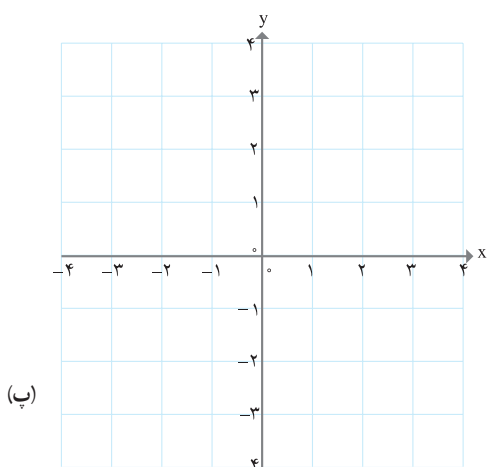
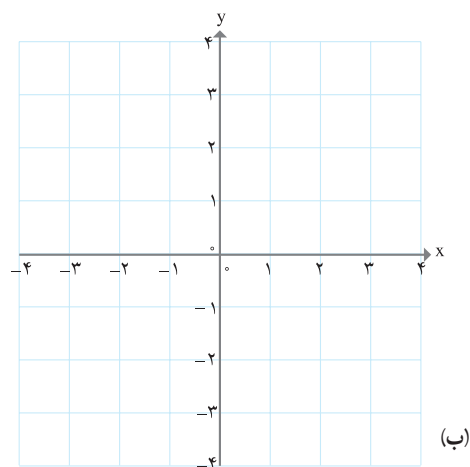
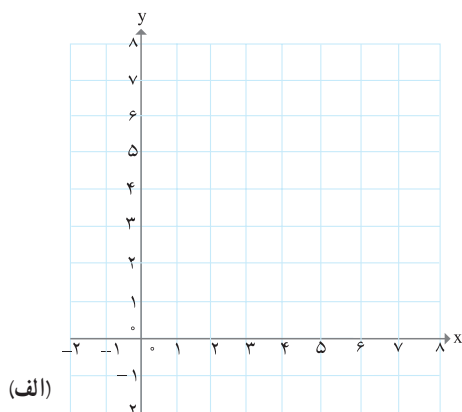
(پ) دامنه آن تنها یک عضو داشته باشد.

(ت) دامنه آن نامتناهی باشد، ولی برد آن تنها یک عضو داشته باشد.

(ث) دامنه و برد آن نامتناهی باشند.

۳ جاهای خالی در جدول را کامل کنید و نمودار توابعی را که در جدول، توصیف شده‌اند، رسم کنید.

	(الف)	(ب)	(پ)	(ت)
تابع	$f(x) = 2x$	$g(x) = 2x$	$h(x) = 2x$	$y = 2x$
دامنه	$\{1, 2, 3, 4\}$	مجموعه اعداد حقیقی	$[2, 3]$	مجموعه اعداد حقیقی نامنفی
برد	؟	مجموعه اعداد حقیقی	؟	؟



۴ یک شمع 2° سانتی متر ارتفاع دارد و در هر ساعت 4° سانتی متر آن می سوزد. پس از چند ساعت شمع خاموش خواهد شد؟ جدولی تنظیم کنید و در ساعات مختلف ارتفاع شمع را محاسبه کنید.

x (زمان)	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y (ارتفاع شمع)						

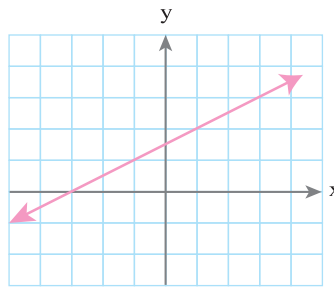
نمودار این تابع را رسم کنید.
چرا این تابع، یک تابع خطی است؟

۵ آیا خط $x = 2$ را می توان به عنوان یک تابع در نظر گرفت؟ چرا؟ خط $y = 5$ را چگونه؟ در حالت کلی چه موقع یک خط را می توان یک تابع نیز در نظر گرفت؟

۶ نمایش جبری سه تابع خطی را بنویسید که دامنه آن بازه $[-3, 5]$ باشد. چه تعداد از این گونه توابع وجود دارند؟

۷ نمایش جبری تابع زیر را که نمودار آن ارائه شده است، به دست آورید.

از بین نمایش های مختلفی که برای این تابع می دانید، کدام یک مناسب تر است؟



۸ جدول زیر دمای سنگ ها در عمق های متفاوت زیر سطح زمین را نشان می دهد.

عمق (کیلومتر)	۱	۲	۳	۴	۵	۶
دما (سانتی گراد)	۵۵	۹۰	۱۲۵	۱۶۰	۱۹۵	۲۳۰

الف) توضیح دهید که چرا این جدول یک تابع را به دست می دهد. نمودار آن را رسم کنید.

ب) معادله ای برای این تابع به دست آورید.

پ) دمای یک سنگ را که در عمق 10° کیلومتری زیر زمین است، بیابید.

۹ الف) تابع $f(x) = -3$ را رسم کنید و مقادیر $f(2)$ و $f(10^\circ)$ و $f(-5)$ و $f(\sqrt{5})$ و $f(-\frac{3}{4})$ را به دست آورید.

ب) اگر دامنه این تابع مجموعه اعداد حقیقی باشد، نمودار تابع را رسم کنید.

پ) نمودار این تابع را وقتی که دامنه آن بازه $[-2, 5]$ باشد، نیز رسم کنید.

۱۰ برای یک تابع خطی می‌دانیم که: $f(2) = 11$ و $f(0) = 7$. نمودار این تابع را رسم کنید و نمایش جبری آن را بنویسید.

۱۱ آیا جدول زیر یک تابع را نشان می‌دهد؟ چرا؟

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۱	۴	۹	۱۵	۲۵	۳۶

۱۲ علی در هر دقیقه پیاده‌روی، مسافت $\frac{1}{2}$ کیلومتر را طی می‌کند. اگر مسافتی را که علی در t دقیقه طی می‌کند، با $f(t)$ نمایش دهیم، کدام عبارت نمایش جبری این تابع را به دست می‌دهد؟

الف) $f(t) = t - \frac{1}{2}$

ب) $f(t) = \frac{1}{2}t$

پ) $f(t) = t + \frac{1}{2}$

ت) $f(t) = \frac{1}{2} - t$

۱۳ اگر دربارهٔ تابع g داشته باشیم: $g(4) = 3$, $g(-2) = \frac{1}{3}$, $g(1) = 5$, $g(0) = 2$ ؛ g را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

۱۴ برای اندازه‌گیری دما از واحدهای «سانتی‌گراد C» و «فارنهایت F» استفاده می‌شود که با رابطه $F = \frac{9}{5}C + 32$ به یکدیگر وابسته‌اند.

الف) 20° - درجهٔ سانتی‌گراد، چند درجهٔ فارنهایت است؟

ب) 104° - درجهٔ فارنهایت چند سانتی‌گراد است؟

پ) معادله‌ای بنویسید که سانتی‌گراد را برحسب فارنهایت به دست آورد.

ت) آیا رابطهٔ بین این دو واحد، یک تابع خطی را معلوم می‌کند؟

۱۵ طول یک مستطیل ۳ واحد بیشتر از عرض آن است. رابطه‌ای ریاضی بنویسید که محیط این مستطیل را برحسب تابعی از عرض آن بیان کند.

۱۶ دو تابع مثال بزنید که دامنه و برد آنها یکی باشد، ولی هیچ زوج مرتب مشترکی نداشته باشند.

۱۷ نمودار تابعی را رسم کنید که دامنهٔ آن $[2, 0]$ و برد آن $[1, -2]$ باشد. چه تعداد از این گونه توابع می‌توان رسم کرد؟

درس سوم: انواع تابع

انواع متفاوتی از توابع وجود دارند. در این درس با برخی از آنها آشنا می‌شویم.

فعالیت

۱ جدول‌های زیر را کامل کنید.

طول ضلع مربع	۰/۱	$\frac{1}{2}$	۱	۳		۲/۵			x
مساحت آن	۰/۰۱				۱۶			۱۴۴	

شعاع دایره	$\frac{1}{2}$	۲	۳	۵		r
مساحت آن	$\frac{\pi}{4}$	4π				

اگر x طول ضلع یک مربع باشد، مساحت آن تابعی از است و به صورت $f(x)$ قابل نمایش است.

اگر r شعاع یک دایره باشد، مساحت دایره تابعی از است و به صورت $g(r)$ قابل نمایش است.
چون f و g به صورت یک چند جمله‌ای درجه دوم به ترتیب از x و r بیان شده‌اند، آنها را توابع درجه دوم می‌نامیم.
حجم یک کره را برحسب یک تابع درجه سوم از r (شعاع کره) بنویسید :

$V(r) = \dots\dots\dots$

توابعی را که نمایش جبری آنها، چند جمله‌ای‌های جبری از یک متغیر هستند، توابع چند جمله‌ای می‌نامیم.

توابع زیر همگی توابع چند جمله‌ای‌اند :

$$f(x) = 2x^2 + 5x + 1$$

$$g(x) = 4x^2 - 3$$

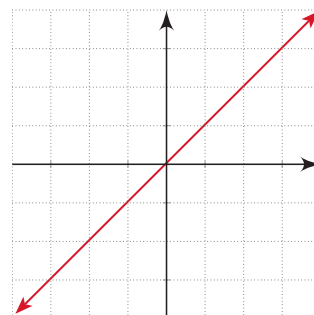
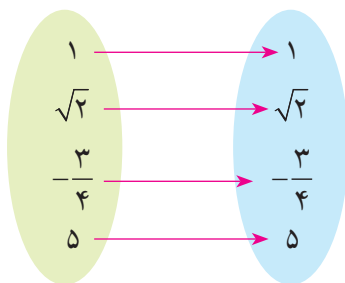
$$h(a) = a^2 + 2a^2 - 4a - 9$$

$$r(t) = -\frac{3}{5}t^4 + t + \sqrt{2}$$

تابع f را به صورت $y = 2x^2 + 5x + 1$ نیز نمایش می‌دهند. بقیه توابع رانیز به این صورت نمایش دهید.

۲ دامنه و برد توابع زیر را به دست آورید. این سه تابع چه شباهت و چه تفاوتی با هم دارند؟

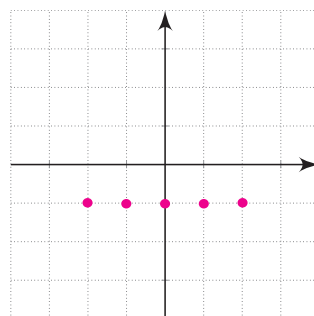
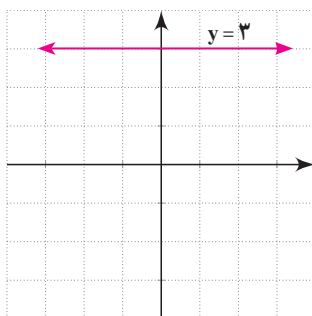
$$f = \{(a,a), (b,b), (c,c)\}$$



اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو از دامنه تابع دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود، تابع را همانی می‌نامند. اگر دامنه تابع همانی را $\mathbb{R}$ در نظر بگیریم، نمودار آن همان خط $y = x$ است که با معادله $f(x) = x$ هم نمایش داده می‌شود.

۳ سه تابع زیر را با هم مقایسه کنید و دامنه و برد آنها را بنویسید. این سه تابع در چه ویژگی‌ای مشترک اند؟

ساعت	۸	۹	۱۰
دمای هوا	۱۹	۱۹	۱۹



تابعی مانند f را که برد آن تنها شامل یک عضو است، تابع ثابت می‌نامیم. اگر این عضو را k بنامیم، تابع ثابت را معمولاً با معادله $f(x) = k$ نمایش می‌دهیم.

کار در کلاس

۱ برای هر مورد مثالی به دلخواه ارائه کنید.

مثالی از یک تابع چند جمله‌ای ارائه کنید.

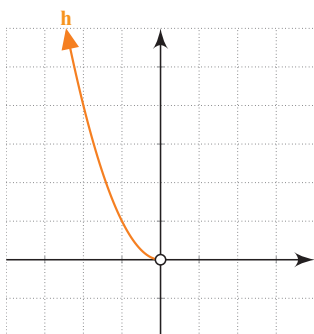
یک تابع همانی مثال بزنید که دامنه آن $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ باشد.

یک تابع مثال بزنید که دامنه و برد آن برابر باشند؛ ولی تابع همانی نباشد.

مثالی از یک تابع ثابت ارائه کنید که دامنه آن ۵ عضوی باشد.

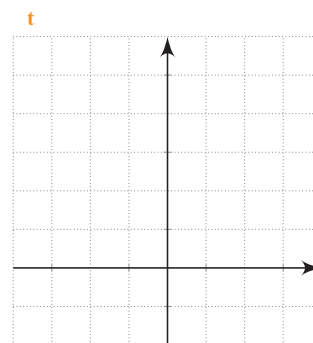
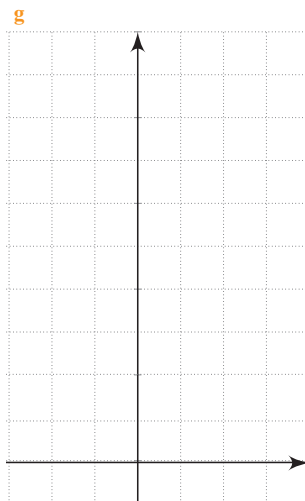
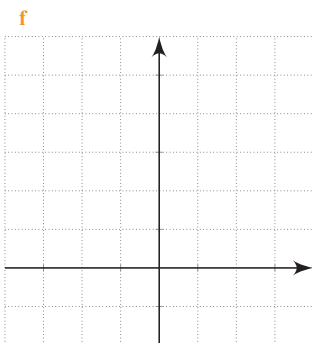
مثالی از تابع ثابت در دنیای واقعی ارائه کنید.

۲ نمودارهای توابع داده شده را رسم و با یکدیگر مقایسه کنید. نمودار تابع h رسم شده است. جدول را کامل کنید.



تابع	$f(x) = x^2$	$g(x) = x^2$	$h(x) = x^2$	$t(x) = x^2$
دامنه	$\{-2, 0, 1, 2\}$	$[-2, 3]$	مجموعه اعداد حقیقی منفی	مجموعه اعداد حقیقی
برد				

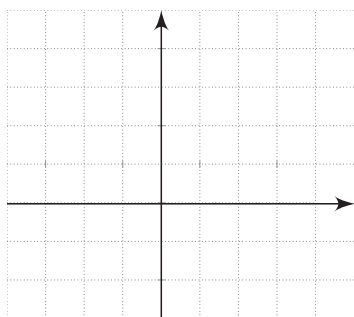
دامنه و برد را روی شکل نیز نشان دهید.



تذکر: اگر نمایش جبری تابعی داده شده باشد؛ ولی دامنه آن مشخص نشده باشد، معمولاً بزرگ‌ترین مجموعه ممکن را دامنه در نظر می‌گیریم. مثلاً دامنه تابع $f(x) = x^2$ را مجموعه اعداد حقیقی در نظر می‌گیریم. در غیراین صورت باید دامنه را به طور دقیق مشخص کنیم.

شعاعیت

جدول زیر تابعی را نشان می‌دهد که اعداد داده شده را به قدرمطلق آن نظیر می‌کند. جاهای خالی را پر و نمودار تابع را رسم کنید. دامنه و برد این تابع را معلوم کنید.



x	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	5
$f(x)$	2	$\frac{1}{2}$				

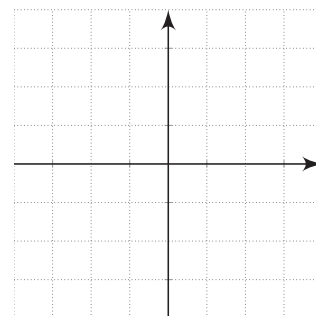
تابعی که هر مقدار در دامنه را به قدرمطلق آن در برد نظیر می‌کند، تابع قدرمطلق نامیده می‌شود. تابع قدرمطلق را با $f(x) = |x|$ یا $y = |x|$ نمایش می‌دهند.

اگر دامنه یک تابع قدرمطلق مجموعه اعداد حقیقی باشد، نمودار آن را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

تابع قدرمطلق را به صورت نیز نمایش می دهند.

با توجه به اینکه برای $x \geq 0$ و $x < 0$ تابع دارای معادله های مختلفی است، این تابع یک تابع چند ضابطه ای (قطعه ای) نامیده می شود.

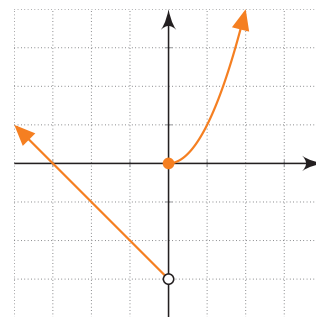


مثال

تابع مقابل نیز یک تابع قطعه ای است.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x - 3 & x < 0 \end{cases}$$

نمودار این تابع برای اعداد مثبت همان نمودار سهمی $y = x^2$ است و برای اعداد منفی نمودار تابع با نمودار خط $y = -x - 3$ برابر است. نمودار $f(x)$ در شکل مقابل رسم شده است.



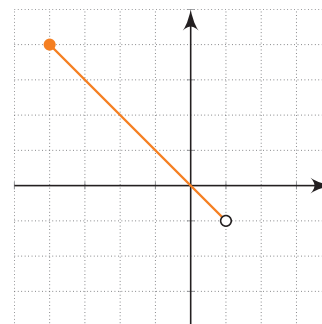
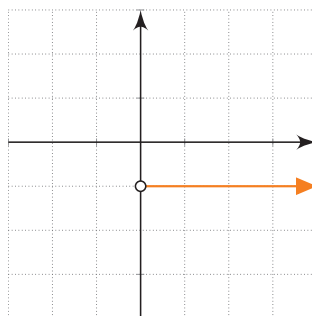
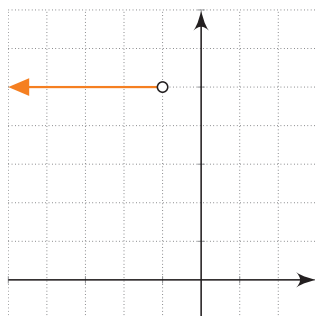
فعالیت

توابع f , g , h و نیز قسمتی از نمودارهای آنها داده شده اند. نمودارها را کامل و مشخص کنید هر نمودار به کدام تابع تعلق دارد؟ دامنه و برد هر تابع را نیز مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x > 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x - 4 & x > 1 \\ \frac{5}{2} & x = 1 \\ -x & -4 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 2x & 2 \leq x \leq 3 \\ 5 & x < -1 \end{cases}$$

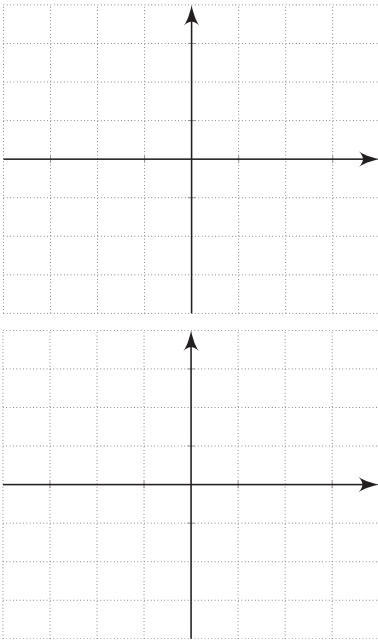


مقادیر $f(3)$, $g(-2)$, $f(-\frac{1}{5})$, $h(\sqrt{5})$ و $g(0)$ را بیابید.

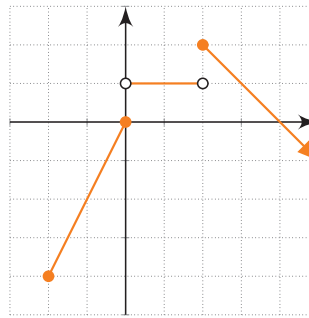
۱ نمودار تابع‌های زیر را رسم و دامنه و برد آنها را مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ 3x + 1 & x \leq 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2x - 5 & x > 2 \\ 1 & -3 < x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}x & x \leq -3 \end{cases}$$

مقادیر $f(0)$ ، $f(5)$ ، $g(2)$ ، $f(-2)$ و $g(-\frac{1}{5})$ را به دست آورید.



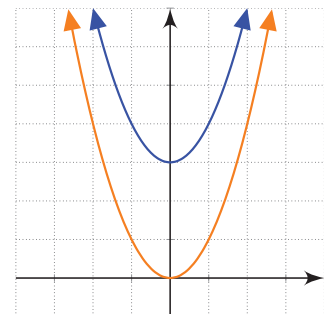
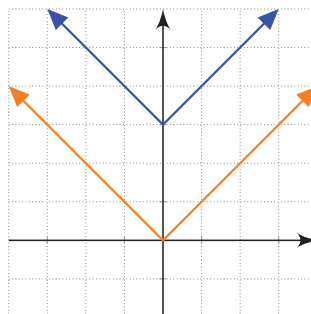
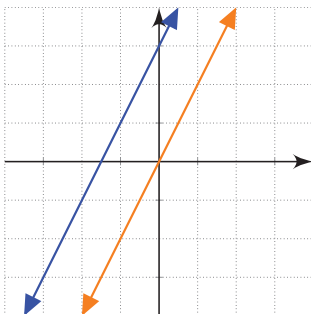
۲ نمودار تابع قطعه‌ای f داده شده است. ضابطه آن را به دست آورید. دامنه و برد این تابع را به دست آورید.



رسم برخی توابع به کمک انتقال

شعاعیت

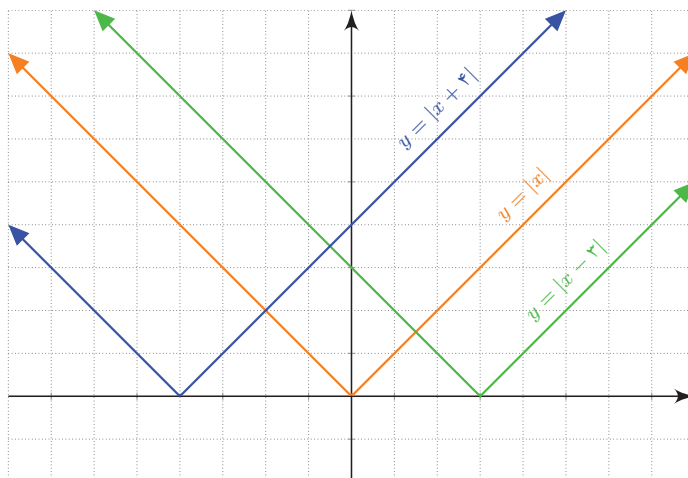
نمودارهای توابع $f(x) = 2x$ و $g(x) = |x|$ و $h(x) = x^2$ و توابع $f(x) = 2x + 3$ و $g(x) = |x| + 3$ و $h(x) = x^2 + 3$ داده شده‌اند. توضیح دهید که سه تابع آخر چگونه به کمک سه تابع اول رسم شده‌اند. سپس توابع $f(x) = 2x - \frac{3}{4}$ و $g(x) = |x| - \frac{3}{4}$ و $h(x) = x^2 - \frac{3}{4}$ را به همین روش رسم کنید.



با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$ ، می‌توان نمودار تابع $f(x) + k$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به اندازه k واحد در امتداد محور y به دست آورد. اگر $k > 0$ باشد انتقال در جهت مثبت و اگر $k < 0$ باشد انتقال در جهت منفی خواهد بود.

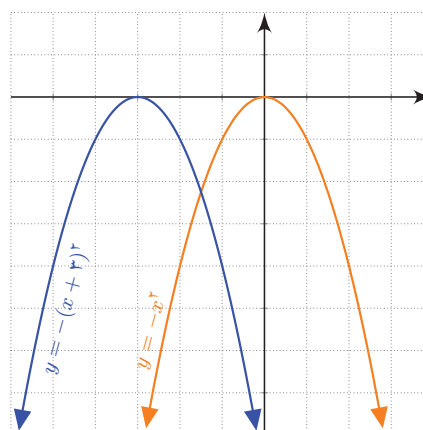
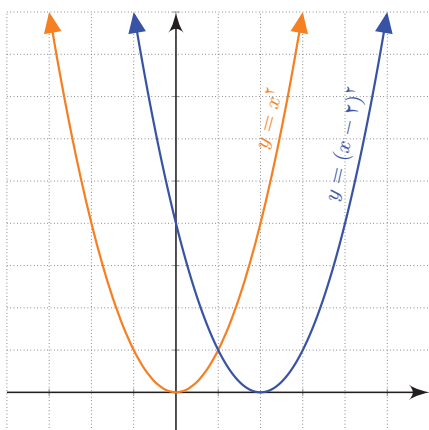
کار در کلاس

۱ در شکل زیر دامنه و برد تابعی را که به کمک تابع $f(x) = |x|$ رسم شده‌اند، بیابید. آیا می‌توانید توضیح دهید نمودار این توابع چگونه رسم شده‌اند؟



برای رسم نمودار تابع $f(x+k)$ کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در امتداد محور x انتقال دهیم. اگر $k > 0$ باشد، انتقال در جهت منفی و اگر $k < 0$ باشد، انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

۲ در شکل‌های زیر به کمک نمودار تابع $f(x) = x^2$ و $f(x) = -x^2$ نمودار توابع دیگری رسم شده‌اند. دامنه و برد آنها را بیابید. نمودار $f(x) = (x+1)^2$ را نیز رسم کنید.



در شکل‌های زیر نمودار توابع درجه دوم f ، g ، h و t رسم شده‌اند.

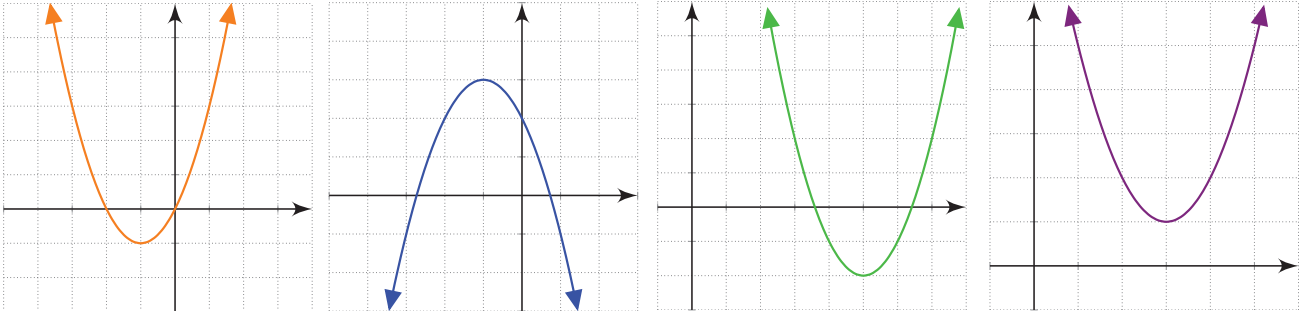
$$f(x) = (x-5)^2 - 2$$

$$g(x) = (x+1)^2 - 1$$

$$h(x) = (x-3)^2 + 1$$

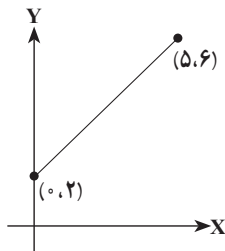
$$t(x) = -(x+1)^2 + 3$$

الف) هر یک از نمودارها کدام تابع را نشان می‌دهند؟
ب) دامنه و برد هر یک از این توابع را به دست آورید:

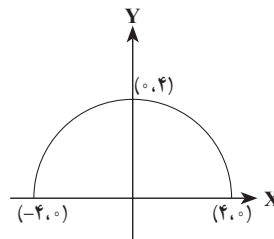


تمرین

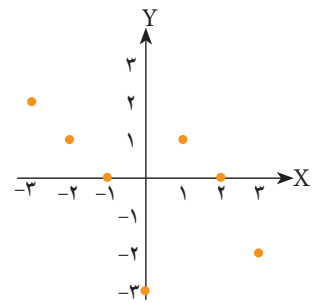
- ۱) تابع $f(x) = 3x - 1$ را که دامنه آن مجموعه $\{\frac{1}{4}, 0, 5\}$ است، رسم کنید. برد این تابع را به دست آورید و نمایش زوج مرتبی و نمودار بیگانی آن را ارائه دهید. اگر دامنه این تابع $\mathbb{R}$ باشد، پاسخ‌ها چگونه خواهد بود؟
- ۲) در شکل‌های زیر نمودار تعدادی از توابع رسم شده‌اند. دامنه و برد هر یک از این توابع را به کمک نمودار آنها مشخص کنید. در هر مورد که امکان دارد، دامنه و برد را به صورت یک بازه نمایش دهید. نمایش جبری توابع (الف) و (ج) را بنویسید.



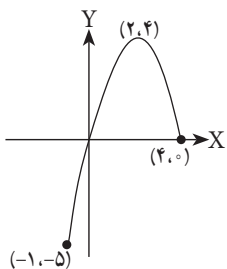
(الف)



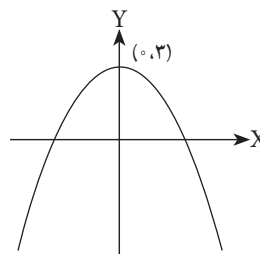
(ب)



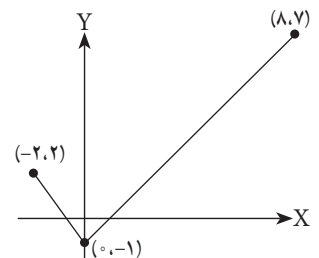
(پ)



(ت)



(ث)



(ج)

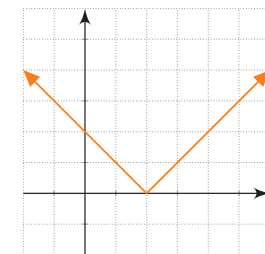
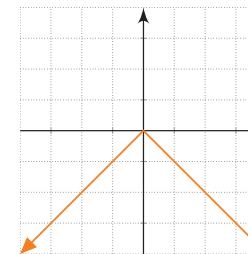
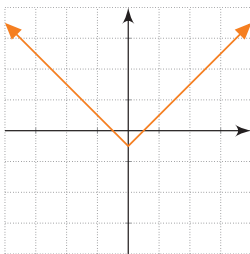
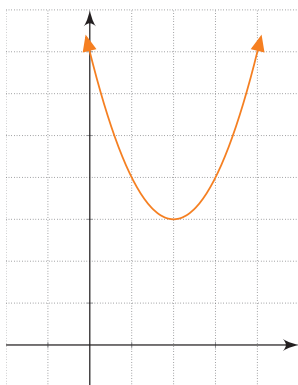
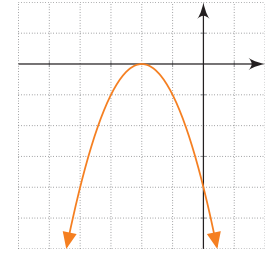
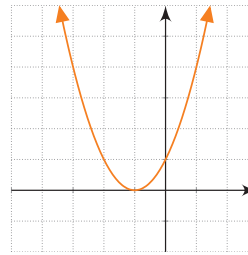
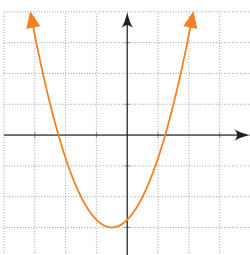
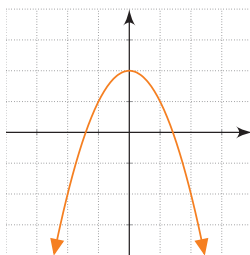
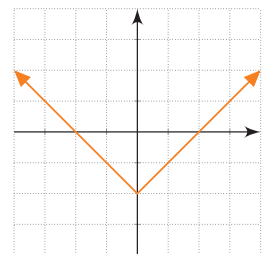
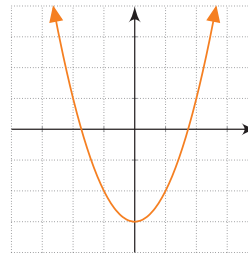
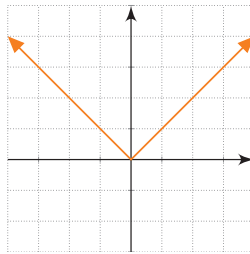
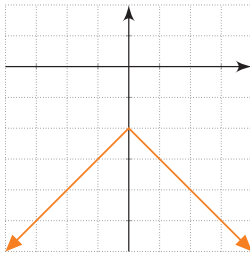
۳ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

- الف) دامنه تابع $f(x) = x^2 - 1$ برابر $(0, +\infty)$ و بُرد آن نیز $(0, +\infty)$ است.
 ب) دامنه تابع $f(x) = |x| - \frac{1}{3}$ همه اعداد حقیقی و بُرد آن $(2, +\infty)$ است.
 پ) دامنه تابع ثابت $f(x) = 2$ برابر $(-\infty, +\infty)$ است.

ت) اگر $f(x) = 2x + 1$ آنگاه، $f(1) = \frac{f(2)}{2}$.

۴ یک تانکر گاز از یک استوانه و دو نیم کره به شعاع r در دو انتهای استوانه، تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه 30° متر باشد، حجم تانکر را بر حسب تابعی از r بنویسید.

۵ هریک از نمودارهای زیر کدام یک از تابع‌های (الف) تا (ر) را نمایش می‌دهد؟ دامنه و برد این توابع چیست؟



الف) $y = x^2 - 3$

ث) $y = (x + 1)^2$

خ) $y = -|x| - 2$

ب) $y = -x^2 + 2$

ج) $y = |x| - \frac{1}{2}$

د) $y = (x - 2)^2 + 3$

پ) $y = |x|$

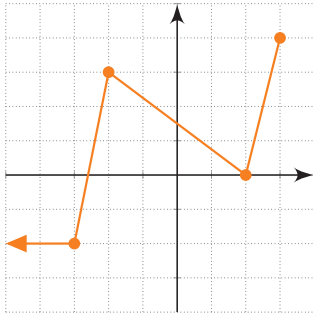
چ) $y = |x - 2|$

ذ) $y = |x| - 2$

ت) $y = -|x|$

ح) $y = -(x + 2)^2$

ر) $y = (x + \frac{1}{2})^2 - 3$



۶ فرض کنیم دامنه هریک از توابع تمرین ۵ به بازه $[-2, 3]$ محدود شده باشد. در این صورت برد هر تابع را پیدا کنید. از نمودارها کمک بگیرید.

۷ نمودار تابع f داده شده است. ضابطه این تابع را بنویسید و مقادیر خواسته شده را حساب کنید.

$$f(\sqrt{5}) \quad f(6) \quad f(3) \quad f\left(\frac{1}{2}\right) \quad f(0) \quad f\left(-\frac{5}{2}\right)$$

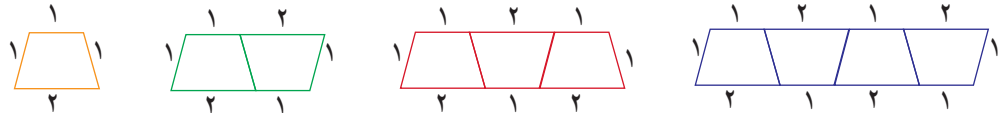
۸ نمودار یک تابع خطی از نقاط $(0, 3)$ و $(4, 2)$ می‌گذرد. $f(-1)$ و $f(-4)$ را به دست آورید.

۹ هزینه مکالمه تلفنی با کشور دیگر، از زمان برقراری تماس برای ۳ دقیقه یا کمتر، ۲ هزار تومان است و پس از آن برای هر دقیقه یک هزار تومان به هزینه آن اضافه می‌شود. مثلاً برای زمان بیشتر از ۳ دقیقه تا دقیقاً ۴ دقیقه، ۳ هزار تومان دریافت می‌شود. نمودار هزینه را برحسب زمان تا پایان زمان ۶ دقیقه رسم کنید.

۱۰ کدام یک از رابطه‌های زیر یک تابع را نمایش می‌دهد؟ چرا؟ نمودار هر دو معادله را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ x+2 & x \leq 2 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ x+1 & x \geq 0 \end{cases}$$

۱۱ الگوی زیر از تعدادی دوزنقه تشکیل شده است.



الف) جدول زیر را کامل کنید.

تعداد دوزنقه‌ها	۱	۲	۳	۴	۵	n
محیط شکل						

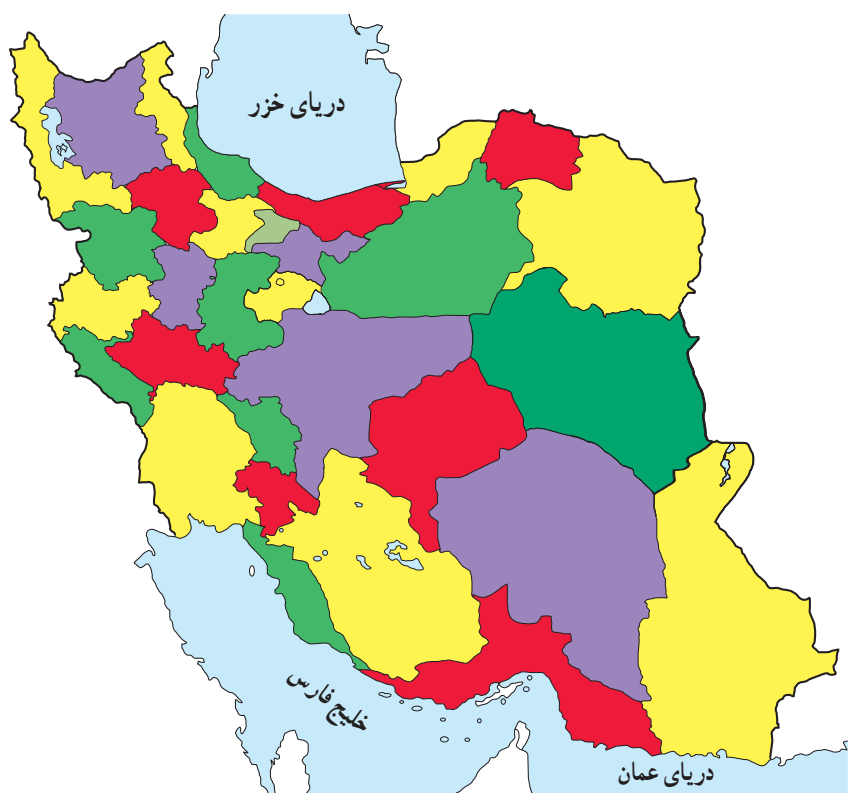
ب) چرا رابطه بین تعداد دوزنقه‌ها و محیط شکل، یک تابع را معلوم می‌کند؟ دامنه و برد این تابع چیست؟ نمودار آن را رسم کنید.

۱۲ نمودار تابعی، یک سهمی است که از نقاط $(-2, 1)$ و $(2, -3)$ می‌گذرد و محور y را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. نمایش جبری این تابع را بیابید و نمودار آن را رسم و دامنه و برد تابع را مشخص کنید.

شمارشی، بدون شمردن



وَإِنْ تَعُدُّوا نِعْمَةَ اللَّهِ لَا تُحْصُوهَا «سورة ابراهيم آیه ۳۴»
و اگر بخواهید نمی توانید نعمت های خدا را بشمارید.



داشتن حداقل چند رنگ کافی است تا هر نقشه‌ای را بتوان به گونه‌ای
رنگ آمیزی کرد که هیچ دو ناحیه هم مرزی هم رنگ نباشند؟

درس اول شمارش

درس دوم جایگشت

درس سوم ترکیب

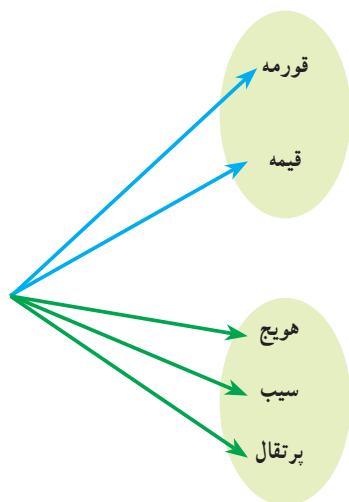
درس اول: شمارش



شاید شمارش در نظر برخی افراد، یک مهارت با اهمیت ریاضی نباشد و تنها یک عمل ساده باشد؛ اما آیا واقعاً شمردن همیشه آسان است؟ می‌دانید که دو اتومبیل نباید پلاک یکسان داشته باشند. با پلاک‌هایی به صورت مقابل، با استفاده از حروف و اعداد، چند اتومبیل را می‌توان شماره گذاری کرد؟

اصل جمع و اصل ضرب

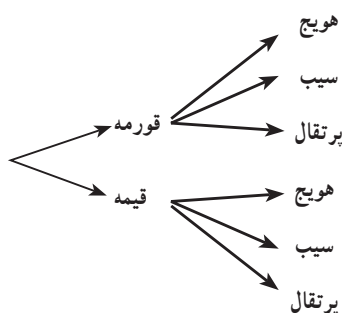
فعالیت



۱ امین قصد دارد به خاطر قبولی در یک آزمون به دوستش پوریا، شیرینی بدهد. او با خود فکر می‌کند که پوریا را به یکی از دو مکان رستوران «یا» آب‌میوه‌فروشی دعوت کند. اگر به رستوران برود، تنها یکی از ۲ نوع غذای چلوخوشت قورمه سبزی و قیمه را می‌تواند انتخاب کند و اگر به آب‌میوه‌فروشی برود، تنها یکی از سه نوع آب‌میوه هویج، سیب و پرتقال را می‌تواند انتخاب کند. چند انتخاب برای پوریا وجود دارد؟

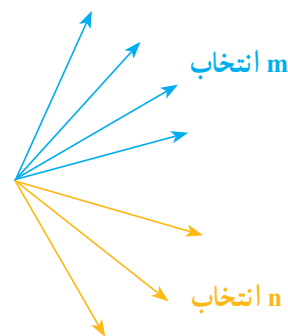
۲ هفته بعد پوریا قصد دارد به خاطر تولدش امین را دعوت کند. اما او می‌خواهد امین را هم به آن رستوران «و» هم به آن آب‌میوه‌فروشی ببرد و در رستوران یک انتخاب و در آب‌میوه‌فروشی هم یک انتخاب به او بدهد. امین چند نوع انتخاب خواهد داشت؟

۳ چه تفاوتی در دو سؤال بالا وجود داشت که باعث شد تعداد حالت‌های موجود در دو مثال متفاوت باشد؟



۴ در هر یک از دو سؤال صفحه قبل چه رابطه‌ای بین تعداد گزینه‌های فهرست‌های انتخابی رستوران و آب‌میوه‌فروشی و تعداد حالات جواب وجود دارد؟ چرا؟

اصل جمع: اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد، به‌طوری‌که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار موردنظر $m+n$ روش وجود دارد.



«توجه کنید که نهایتاً قرار است کار مورد نظر فقط با یکی از شیوه‌ها انجام شود. مثلاً در قسمت اول فعالیت قبل، امین فقط یکی از کارهای «دعوت به رستوران یا دعوت به آب‌میوه‌فروشی» را انجام می‌دهد».

تعمیم اصل جمع: اگر کاری را بتوان به k روش انجام داد، به‌طوری‌که در روش اول m_1 انتخاب، در روش دوم m_2 انتخاب، ... و در روش k ام m_k انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار موردنظر $m_1 + m_2 + \dots + m_k$ روش وجود دارد.

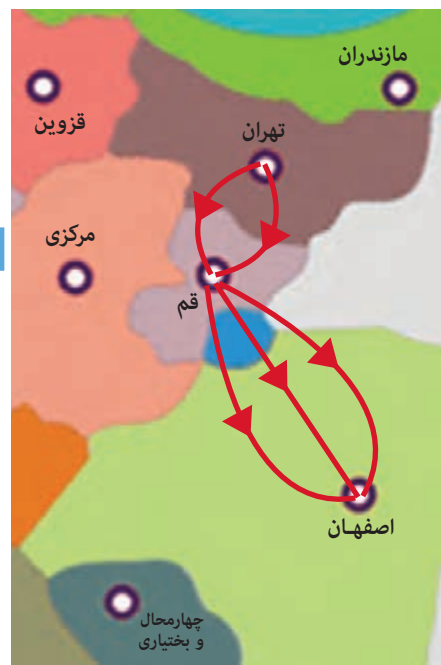
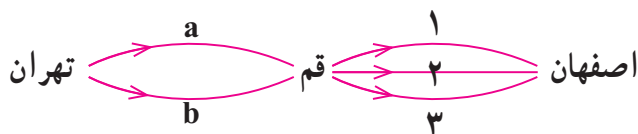
اصل ضرب: اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد، به‌طوری‌که برای انجام مرحله اول m روش و برای هر کدام از این m روش، مرحله دوم را بتوان به n روش انجام داد، در کل کار موردنظر با $m \times n$ روش قابل انجام است.

«توجه کنید که هر دو مرحله باید انجام پذیرد. مثلاً در مثال ۲ هم دعوت به رستوران که مرحله اول است انجام می‌گیرد و هم دعوت به آب‌میوه‌فروشی که مرحله دوم است، صورت می‌پذیرد».

مثال

فردی می‌خواهد با اتومبیل خود از تهران به اصفهان برود و برای این کار قصد دارد از قم عبور کند. اگر از تهران به قم دو مسیر a و b و از قم به اصفهان سه مسیر ۱ و ۲ و ۳ وجود داشته باشند، این فرد به چند طریق می‌تواند از تهران به اصفهان سفر کند؟
حل: طبق اصل ضرب تعداد حالات‌ها $۲ \times ۳ = ۶$ است که عبارت‌اند از:

$a, ۱$ $a, ۲$ $a, ۳$
 $b, ۱$ $b, ۲$ $b, ۳$





تعمیم اصل ضرب: اگر انجام کاری شامل k مرحله باشد؛ به طوری که برای انجام مرحله اول m_1 روش، برای انجام مرحله دوم m_2 روش، ... و برای انجام مرحله k ام m_k روش وجود داشته باشد (با فرض اینکه در هر مرحله انتخاب تمام روش‌های آن مرحله ممکن باشد)، کار موردنظر با $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k$ روش قابل انجام است.

کار در کلاس

۱ پُژمان قصد دارد به عیادت دوستش برود. او به یکی از دو انتخاب «یک شاخه گل» یا «یک نوع شیرینی» برای بردن به خانه دوستش فکر می‌کند. گل‌هایی که او در نظر دارد، عبارت‌اند از: مریم، گلایل، زنبق و رُز. شیرینی‌هایی که او در نظر دارد، عبارت‌اند از: گردویی، نارنگیلی و کشمش. او چند انتخاب دارد؟

۲ هفته بعد پُژمان می‌خواهد به دیدن خانه جدید یکی از دوستانش برود. او این بار می‌خواهد «یک شاخه گل» و «یک نوع شیرینی» بخرد و همان گزینه‌ها را در ذهن دارد. او این بار به چند حالت می‌تواند خرید کند؟ آنها را بنویسید.

۳ در هر یک از قسمت‌های (۱) و (۲) از چه اصلی استفاده کردید؟ چرا؟

۴ دو مسئله طرح کنید که یکی با اصل جمع و یکی با اصل ضرب حل شود.

در برخی مسائل لازم است از هر دو اصل جمع و ضرب استفاده شود.

مثال

فردی می‌خواهد از تهران به اصفهان برود. او قصد دارد با اتومبیل خود یا با قطار این سفر را انجام دهد. اگر با اتومبیل خود به این سفر برود، مسیرها و انتخاب‌های او مانند مثال قبل است و اگر تصمیم بگیرد با قطار برود، سه نوع قطار می‌تواند انتخاب کند. او در کل چند انتخاب دارد؟

حل: اگر با اتومبیل برود، طبق اصل ضرب به ۶ طریق ممکن است و اگر قطار را انتخاب کند سه طریق. لذا طبق اصل جمع در کل ۹ انتخاب دارد.
با رسم یک شکل این پاسخ را توجیه کنید.

مثال: رمزی از سه حرف تشکیل شده است که هر کدام می توانند از حروف فارسی یا حروف کوچک انگلیسی باشند. اگر حروف کنار هم از یک زبان نباشند، برای این رمز چند حالت ممکن وجود دارد؟

حل:

حالت اول: اگر گزینه سمت چپ حرف فارسی باشد: $۳۲ \times ۲۶ \times ۳۲ = ۲۶۶۲۴$

حالت دوم: اگر گزینه سمت چپ حرف انگلیسی باشد: $۲۶ \times ۳۲ \times ۲۶ = ۲۱۶۳۲$

تعداد حالات ممکن: $۲۶۶۲۴ + ۲۱۶۳۲ = ۴۸۲۵۶$

کار در کلاس

الف) با سه رقم ۵ و ۳ و ۲ چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟ به طور مثال ۲۳۵ و ۳۳۵ سه نمونه از این اعدادند. برای این کار می توان نوشتن عدد سه رقمی را به صورت پرکردن سه جایگاه مقابل با ارقام مذکور در نظر گرفت.



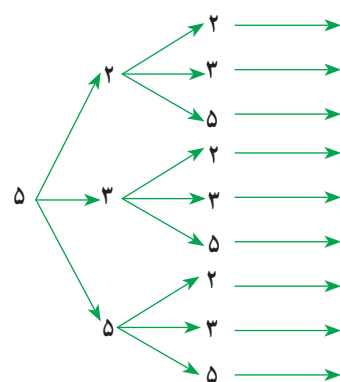
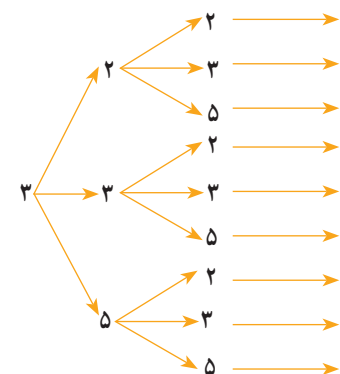
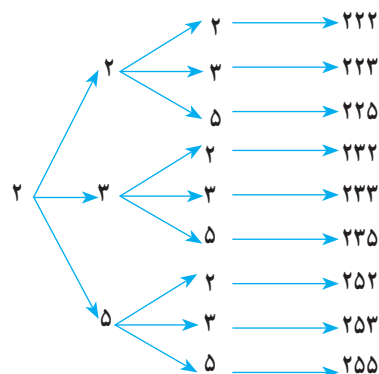
پس این کار سه مرحله دارد و هر سه مرحله آن باید انجام شود، برای به دست آوردن جواب، تعداد راه های پرکردن هر جایگاه باید مشخص شود و با استفاده از اصل ضرب در هم ضرب شود.

هر جایگاه را به سه حالت می توان پر کرد؛ لذا ۲۷ عدد وجود دارد.

$$۲۷ \times ۳ \times ۳ = ۲۷۳$$

تعداد حالت ها = $۲۷۳ \times ۳ \times ۳ = ۲۷۳$

با نمودار درختی در سال های پیش آشنا شده اید. از این نمودار نیز می توان برای به دست آوردن تعداد اعداد مورد نظر و نیز نوعی از نمایش آنها استفاده کرد. به نمودار درختی کشیده شده در حاشیه صفحه دقت و آن را تکمیل کنید.



ب) با همان سه رقم چند عدد سه رقمی می توان ساخت که رقم تکراری نداشته باشد؟

۱- برای پرکردن جایگاه اول از سمت چپ (صدگان) چند حالت امکان دارد؟



تعداد حالت ها →

۲- حال فرض کنیم یکی از اعداد را در اولین جایگاه گذاشته ایم. برای پرکردن جایگاه دوم چند حالت امکان دارد؟



تعداد حالت ها →

یک عدد قرار گرفته است	یک عدد قرار گرفته است	
-----------------------	-----------------------	--

تعداد حالت ها →

۳- برای پر کردن جایگاه سوم چند حالت وجود دارد؟
لذا $..... \times \times =$ عدد سه رقمی توسط ۲ و ۳ و ۵ با ارقام غیر تکراری وجود دارد.

پ با همان سه عدد چند عدد سه رقمی زوج می توان نوشت؟

--	--	--

۱- جایگاه سمت راست به چند روش می تواند پر شود، به گونه ای که عدد ساخته شده زوج باشد؟

۲- دو جایگاه دیگر هر یک به چند روش می توانند، پر شوند؟
لذا تعداد اعداد در این حالت برابر است با $..... \times \times =$

ت با همان سه عدد چند عدد سه رقمی زوج با ارقام غیر تکراری می توان نوشت؟

--	--	--

۱- جایگاه سمت راست به چند روش می تواند پر شود به گونه ای که عدد ساخته شده زوج باشد؟
۲- پس از پر کردن جایگاه سمت راست، جایگاه سمت چپ، به چند طریق می تواند پر شود؟
۳- حال جایگاه وسط به چند طریق می تواند پر شود؟
۴- لذا تعداد اعداد مورد نظر در این حالت برابر است با $..... \times \times =$

مثال

با ارقام ۷ و ۳ و ۲ و ۰
الف) چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟
ب) چند عدد سه رقمی با ارقام غیر تکراری می توان نوشت؟
پ) چند عدد سه رقمی فرد با ارقام غیر تکراری می توان نوشت؟
ت) چند عدد سه رقمی زوج با ارقام غیر تکراری می توان نوشت؟

حل :



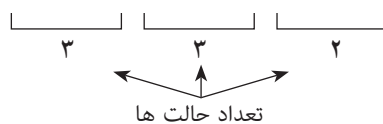
الف) با توجه به اصل ضرب و چون رقم صفر در جایگاه صدگان نمی تواند باشد؛ بنابراین تعداد حالت ها مطابق شکل مقابل است.

لذا ۴۸ عدد سه رقمی با ارقام مذکور می توان نوشت.

$$3 \times 4 \times 4 = 48$$

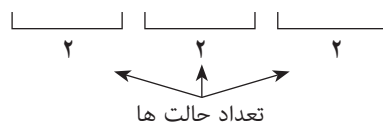
ب) طبق اصل ضرب و با توجه به اینکه رقم صفر در سمت چپ نمی‌تواند بیاید و ارقام نباید تکراری باشند؛ لذا تعداد حالت‌ها مطابق شکل مقابل است؛ بنابراین ۱۸ عدد می‌توان نوشت.

$$3 \times 3 \times 2 = 18$$



پ) با توجه به اینکه رقم سمت راست باید ۳ یا ۷ باشد و رقم صفر هم نمی‌تواند رقم سمت چپ باشد؛ لذا تعداد حالت‌ها به صورت مقابل است.

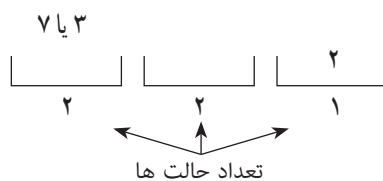
$$2 \times 2 \times 2 = 8$$



ت) چون عدد موردنظر باید زوج باشد؛ لذا رقم سمت راست باید ۰ یا ۲ باشد و چون در حالتی که رقم ۲ سمت راست باشد، رقم ۰ سمت چپ هم نمی‌تواند باشد، لذا باید دو حالت زیر را در نظر بگیریم و طبق اصل جمع تعداد حاصل در دو حالت را با هم جمع کنیم.

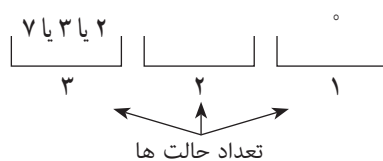
حالت اول: اگر رقم سمت راست ۲ باشد؛ یعنی رقم سمت راست یک حالت می‌تواند باشد؛ لذا طبق اصل ضرب تعداد حالت‌ها به صورت مقابل است.

$$2 \times 2 \times 1 = 4$$



حالت دوم: اگر رقم سمت راست ۰ باشد، حالت‌های جایگاه‌ها به صورت مقابل است.

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$



لذا در کل ۱۰ عدد می‌توان نوشت.

راه حل دوم: با توجه به صورت سؤال‌های (ب)، (پ) و (ت) می‌توان به صورت زیر جواب را حساب کرد:

$$10 - 8 - 18 = 1 \quad \text{جواب قسمت (پ)} - \text{جواب قسمت (ب)} = \text{جواب قسمت (ت)}$$

تمرین

۱) تعداد حالت‌های ممکن برای رمز یک دستگاه را در حالت‌های زیر به دست آورید.

مشخص کنید برای این کار از اصل جمع استفاده می‌شود یا از اصل ضرب یا از هر دو.

الف) این رمز از یک گزینه تشکیل شده، که یک عدد یا یک حرف الفبای فارسی است.

ب) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که گزینه اول یک عدد و گزینه دوم یک حرف الفبای فارسی است.

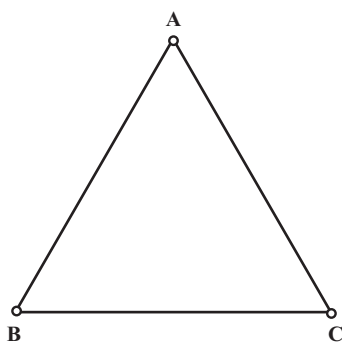
پ) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یکی از گزینه‌ها یک عدد و گزینه دیگر یک حرف الفبای فارسی است.

ت) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یا هر دو گزینه عددند یا هر دو گزینه حروف انگلیسی اند.

ث) این رمز از ۴ گزینه تشکیل شده است که دو گزینه اول اعداد غیر تکراری و دو گزینه دوم حروف انگلیسی غیر تکراری اند.

۲) در یک شهرک صنعتی ۵ بلوار اصلی و در هر بلوار، بین ۸ تا ۱۰ خیابان، و در هر خیابان بین ۱۰ تا ۱۲ کوچه و در هر کوچه بین ۲۰ تا ۳۰ کارخانه وجود دارد. حداقل و حداکثر تعداد کارخانه هایی که ممکن است در این شهرک وجود داشته باشد، چند تاست؟

۳) می خواهیم رأس های مثلث زیر را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کنیم.



الف) به چند طریق این کار امکان پذیر است؟

ب) به چند طریق می توان این رنگ آمیزی را انجام داد، به گونه ای که رأس هایی که به هم وصل اند، هم رنگ نباشند.

پ) هر دو قسمت (الف) و (ب) را در حالتی که از سه رنگ مختلف استفاده می کنیم، بررسی کنید.

۴) با پلاک هایی به صورت زیر که عدد دو رقمی سمت راست آنها از مجموعه A انتخاب شوند و سایر ارقام از مجموعه B انتخاب شوند و حرف استفاده شده در آن از مجموعه C انتخاب شود، چند ماشین را می توان شماره گذاری کرد؟



$$A = \{11, 22, \dots, 99\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$C = \{ي, ه, و, ن, م, ل, ق, ط, ص, س, د, ج, ب\}$$

۵) در یک کشور نوعی اتومبیل در ۵ مدل، ۱۰ رنگ، ۳ حجم موتور مختلف و ۲ نوع دنده (اتوماتیک و غیر اتوماتیک) تولید می شود.

الف) چند نوع مختلف از این اتومبیل تولید می شود؟

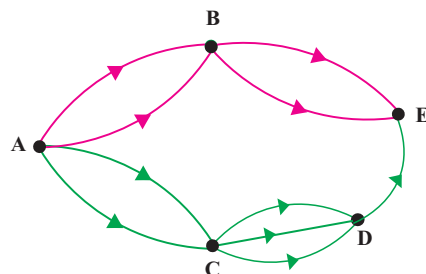
ب) اگر یکی از رنگ های تولید شده مشکی باشد، چند نوع از این اتومبیل با رنگ مشکی تولید می شود؟

پ) چند نوع از این اتومبیل مشکی دنده اتوماتیک تولید می شود؟



۶ یک آزمون چندگزینه‌ای شامل ۱۰ سؤال ۴ گزینه‌ای و ۵ سؤال ۲ گزینه‌ای (بله - خیر) است. فردی قصد دارد به سؤال‌ها به صورت تصادفی جواب دهد. او به چند روش می‌تواند این کار را انجام دهد اگر:
الف) اگر مجبور باشد به همه سؤال‌ها جواب دهد؟
ب) بتواند سؤال‌ها را بدون جواب هم بگذارد؟

۷ اگر شکل مقابل نشان دهنده جاده‌های بین شهرهای A و B و C و D و E باشد و همه جاده‌ها یک طرفه باشند، به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر E رفت؟



۸ مسئله زیر را به گونه ای کامل کنید که جواب ارائه شده، درست باشد.
مسئله: چند عدد دورقمی زوج می‌توان نوشت؛ به طوری که؟

حل: تعداد راه‌های نوشتن یکان برابر ۵ تاست و تعداد راه‌های نوشتن دهگان برابر ۴ تاست. لذا با توجه به اصل ضرب ۲۰ عدد با شرایط مورد نظر وجود دارد.

۹ مسئله‌ای طرح کنید که با استفاده از اصل جمع یا اصل ضرب و یا هر دوی آنها حل شود و جواب آن به صورت زیر باشد.

$$2 \times 2 \times 2 + 3 \times 3 \times 3 = 35$$



درس دوم: جایگشت

جایگشت

سه فیش و سه درگاه مانند شکل مقابل وجود دارند که باعث اتصال دو دستگاه الکتریکی به هم می‌شوند. برای اتصال درست دو دستگاه، باید هر فیش به درگاه مخصوص به خود وصل شده باشد. چند حالت مختلف برای اتصال سه فیش به سه درگاه وجود دارد؟ بین تمام حالت‌ها فقط یکی منجر به کارکردن درست دستگاه می‌شود. آیا می‌دانید برای راحت‌تر پیدا کردن حالت درست، شرکت‌های تولیدی چگونه عمل می‌کنند؟

فعالیت

۱ فرض کنید فیش‌ها را a و b و c بنامیم. حالت‌های مختلف قرار دادن آنها را در مربع‌های زیر بنویسید.

a	b	c
a	c	b

۲ آیا در سه مربع به هم چسبیده، حرفی می‌تواند تکرار شود؟

۳ با توجه به اصل ضرب چگونه می‌توان تعداد این چینش‌ها را به دست آورد؟

فعالیت

به چند حالت مختلف می‌توان چهار عدد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را کنار هم قرار داد؟ می‌خواهیم مسئله قبل را با استفاده از اصل ضرب حل کنیم. فرض کنید ۴ مربع به صورت مقابل وجود دارد که پر کردن هر کدام از مربع‌ها یک مرحله از چینش است. واضح است که هر چهار مرحله باید انجام شود؛ لذا تعداد حالت‌های ممکن برای پر کردن مربع‌ها باید در هم ضرب شود.



«اگر چند شیء متمایز داشته باشیم، به هر حالت چیدن آنها کنار هم، یک جایگشت از آن اشیاء می‌گوییم.»

۱ اولین مربع (مثلاً مربع سمت چپ) به چند روش می‌تواند پر شود؟

– پس از پر شدن اولین مربع چند عدد چیده نشده باقی مانده است؟

– حال دومین مربع را به چند روش می‌توان پر کرد؟ سومین و چهارمین مربع را چگونه؟

– حال با توجه به اصل ضرب، تعداد حالت‌های ممکن برابر است با

..... × × ×

بنابراین تعداد راه‌های چیدن چهار شیء متمایز یا به عبارتی تعداد جایگشت‌های چهار شیء متمایز عبارت است از حاصل ضرب

۲ به نظر شما تعداد روش‌های چیدن پنج حرف یونانی α و β و γ و δ و θ (به ترتیب آلفا، بتا، گاما، دلتا و تتا خوانده می‌شوند) کنار هم و بدون تکرار، یا به عبارتی تعداد جایگشت‌های پنج شیء متمایز چندتا است؟

۳ تعداد کلمات هفت حرفی (با معنی و بدون معنی) که از کنار هم قرار دادن حروف «ت»، «ش»، «و»، «ا»، «ن»، «پ» و «ه» می‌توان ساخت چندتا است؟ (بدون تکرار حروف)

۴ با استفاده از ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ چند عدد ۹ رقمی با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟

۵ تعداد جایگشت‌های 10 شیء متمایز چندتا است؟

۶ اگر n یک عدد طبیعی باشد، تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز را با یک حاصل ضرب نشان دهید.

معرفی یک نماد

اگر n یک عدد طبیعی باشد، حاصل ضرب اعداد طبیعی و متوالی از ۱ تا n را به صورت $n!$ (n فاکتوریل) نمایش می‌دهیم. به طور مثال $1! = 1$ ، $2! = 1 \times 2$ ، $3! = 1 \times 2 \times 3$ و الی آخر قرار داد: $0! = 1$.

حال با توجه به این نماد، تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با

کار در کلاس

۱ مانند نمونه هر قسمت را کامل کنید.

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6 \times 5! \quad \text{الف)}$$

$$8! \quad \text{ب)}$$

$$10! \quad \text{پ)}$$

$$n! \quad \text{ت)}$$

۲ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف)} \quad \frac{5!}{4!} = \frac{5 \times \overbrace{4 \times 3 \times 2 \times 1}^{4!}}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 5$$

$$\text{ب)} \quad \frac{10!}{9!}$$

$$\text{پ)} \quad \frac{n!}{(n-1)!}$$

$$\text{ت)} \quad \frac{8!}{6!}$$

$$\text{ث)} \quad \frac{10!}{8!}$$

$$\text{ج)} \quad \frac{n!}{(n-2)!}$$

$$\text{ح)} \quad \frac{8!}{5!}$$

$$\text{خ)} \quad \frac{10!}{7!}$$

$$\text{د)} \quad \frac{n!}{(n-3)!}$$

$$\text{ز)} \quad \frac{n!}{(n-4)!}$$

$$\text{ح)} \quad \frac{n!}{(n-5)!}$$

$$\text{ط)} \quad \frac{n!}{(n-k)!}$$

۳ حاصل ضرب‌های زیر را مانند نمونه با استفاده از نماد فاکتوریل نمایش دهید.

الف) $9 \times 8 = \frac{9!}{7!}$

ب) $9 \times 8 \times 7 \times 6$

پ) $11 \times 10 \times 9$

ت) ۸

ث) $n(n-1)$

ج) $n(n-1)(n-2)(n-3)$

فعالیت

۱ تعداد کلمات هفت حرفی که بدون تکرار حروف با حروف a, b, d, e, f, s, t می‌توان نوشت؛ یعنی تعداد جایگشت‌های هفت شیء متمایز برابر است با

۲ حال با توجه به اصل ضرب می‌خواهیم تعداد کلمات سه حرفی با حروف متمایز را که با همان هفت حرف بالا می‌توان نوشت، به دست آوریم.
• برای انتخاب اولین حرف از حروف کلمه سه حرفی چند انتخاب داریم؟ برای انتخاب دوم و سوم حرف چطور؟
• بنابراین تعداد کلمات سه حرفی مورد نظر برابر است با

در واقع آنچه به دست آمد، تعداد راه‌های چیدن سه شیء از هفت شیء متمایز یا به عبارتی تعداد جایگشت‌های سه تایی از هفت شیء متمایز است.

۳ تعداد جایگشت‌های چهار تایی از نه شیء متمایز را به دست آورید.

۴ اعداد به دست آمده در مراحل ۲ و ۳ را با استفاده از فاکتوریل بنویسید.

۵ تعداد جایگشت‌های سه تایی از n شیء متمایز را به دست آورید و آن را با استفاده از فاکتوریل بنویسید.

۶ تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز ($0 \leq r \leq n$) را به دست آورید و آن را با استفاده از فاکتوریل بنویسید.

تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز یا به عبارتی تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء متمایز را که در آنها ترتیب قرار گرفتن مهم باشد، با $p(n, r)$ نمایش می‌دهیم و مقدار آن از دستور زیر محاسبه می‌شود.

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال

با حروف کلمه «جهانگردی» و بدون تکرار حروف :

- الف) چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت؟ چند تا از آنها به «ی» ختم می‌شود؟
- ب) چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف «د» و «ی» کنار هم قرار داشته باشند؟
- پ) چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت؟ چند تا از آنها به «گردی» ختم می‌شوند؟
- ت) چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف کلمه «جهان» چهار حرف اول باشند؟
- ث) چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف کلمه «جهان» کنار هم باشند؟
- ج) چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که با حرف نقطه دار شروع شوند؟

حل :

الف) برای نوشتن تمام کلمات ۸ حرفی بدون تکراری با این ۸ حرف کافی است تعداد جایگشت‌های ۸ شیء متمایز را به دست آوریم؛ لذا جواب برابر ۸! است. در حالتی که حرف آخر «ی» باشد، کافی است تعداد جایگشت‌ها روی هفت حرف دیگر را به دست آوریم؛ لذا در این حالت جواب برابر ۷! است.

ب) حروف «د» و «ی» به دو حالت «دی» و «ید» می‌توانند کنار هم بیایند. برای پیدا کردن تعداد کلماتی که در آنها این دو حرف به صورت «دی» در کنار هم آمده‌اند، کافی است این دو حرف را یک حرف در نظر بگیریم؛ لذا کافی است تعداد جایگشت‌های هفت شیء متمایز را به دست آوریم که برابر است با ۷!. چون همین تعداد هم برای حالت «ید» وجود دارد پس جواب کلی برابر است با $2 \times 7!$.

پ) تعداد کلمات شش حرفی برابر است با تعداد جایگشت‌های شش تایی از هشت شیء متمایز یعنی $P(8,6) = \frac{8!}{(8-6)!} = \frac{8!}{2!}$ در حالتی که کلمه بخواهد به «گردی» ختم شود، با توجه به اینکه چهار حرف آخر مشخص‌اند؛ لذا فقط باید تعداد حالت‌های نوشتن دو حرف اول توسط حروف کلمه «جهان» را به دست آورد که برابر است با تعداد جایگشت‌های دوتایی از چهار

$$P(4,2) = \frac{4!}{(4-2)!} = 12 \text{ یعنی: } 12$$

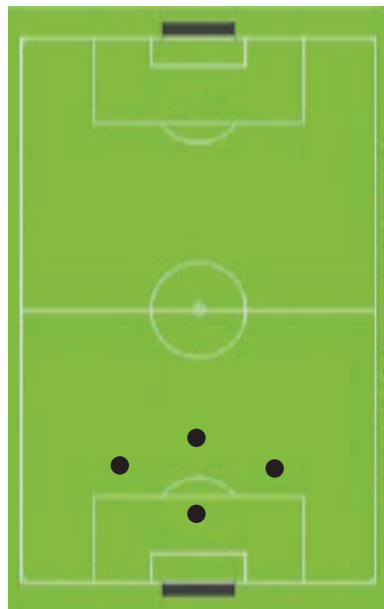
ت) چهار حرف اول، حروف کلمه «جهان» هستند که به $4!$ حالت می‌توانند بیایند. حال 4 حرف آخر را باید با 4 حرف باقی‌مانده (گ ر د ی) نوشت که این کار را هم به $4!$ روش می‌توان انجام شود. بنابراین طبق اصل ضرب، نوشتن کلمه مورد نظر به $4! \times 4!$ روش می‌تواند انجام شود.

ث) تعداد حالت‌های قرار گرفتن حروف کلمه «جهان» در کنار هم برابر است با تعداد جایگشت‌های چهار شیء متمایز یعنی $4!$. حال هر کدام از این جایگشت‌ها را که در نظر بگیریم، برای نوشتن کلمه 8 حرفی کافی است این چهار حرف کنار هم قرار گرفته (چهار حرف کلمه «جهان») را یک حرف حساب کنیم؛ بنابراین کافی است تعداد جایگشت‌های پنج شیء متمایز را حساب کنیم که برابر است با $5!$. پس طبق اصل ضرب جواب برابر است با: $4! \times 5!$.
ج) حروف اول باید یکی از سه حرف «ج»، «ن» و «ی» باشد. پس 3 انتخاب برای حرف اول داریم. حال با انتخاب هر کدام از این 3 حرف برای چینش 7 حرف دیگر $7!$ وجود دارد بنابراین جواب برابر است با: $3 \times 7!$.

کار در کلاس

۱) یک مربی فوتبال قصد دارد برای بازی پیش‌رو در تیم خود یک دفاع راست، یک دفاع چپ، یک دفاع جلو و یک دفاع عقب قرار دهد. او شش بازیکن دفاعی دارد که می‌توانند در هر کدام از این چهار پست بازی کنند. در شروع بازی چند حالت برای چینش این خط دفاعی برای این مربی وجود دارد؟

۲) با عددهای 5 و 3 و 2 و 1 چند عدد سه رقمی با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟



تمرین

۱) در یک لیگ فوتبال 18 تیم قرار دارند. در پایان این لیگ تیم‌های اول تا سوم به چند حالت مختلف می‌توانند مشخص شوند؟

۲) از بین تعدادی کتاب مختلف می‌خواهیم سه کتاب را انتخاب کنیم و در قفسه‌ای بچینیم. اگر تعداد حالت‌های مختلف برای این کار 210 تا باشد، تعداد کتاب‌ها چند تاست؟

۳) کدام یک از موارد زیر درست و کدام نادرست است؟

$$6! = 3! + 3!$$

$$6! = 6 \times 5!$$

$$8! = 4! \times 2!$$

$$2 \times 3! = 6!$$

$$(3!)^2 = 9!$$

$$4! = \frac{8!}{2!}$$

۴ در یک نوع ماشین حساب کوچک که دارای ۲۰ کلید است، برای انجام یک دستور خاص باید سه کلید مشخص با ترتیبی مشخص فشار داده شوند. اگر فردی نداند سه کلید مورد نظر کدام‌اند و بخواهد به‌طور تصادفی این کار را انجام دهد و فشردن هر سه کلید ۲ ثانیه زمان بخواهد، این فرد حداکثر (در بدترین حالت) در چه زمانی می‌تواند دستور مورد نظر را اجرا کند؟

۵ با حروف کلمه «گل پیرا» و بدون تکرار حروف
 الف) چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت؟ چند تا از آنها با «گل» شروع می‌شود؟
 ب) چند کلمه ۴ حرفی می‌توان نوشت؟
 پ) چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت که در آنها دو حرف «پ» و «ر» در کنار هم آمده باشند؟
 ت) چند کلمه ۴ حرفی می‌توان نوشت که در آنها دو حرف «پ» و «ر» در کنار هم آمده باشند؟
 ث) چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف کلمه «پیرا» کنار هم آمده باشند؟



درس سوم: ترکیب

فعالیت

۱ همان طور که دیدید، با پنج رقم ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ تعداد $5! = 120$ عدد سه رقمی با رقم های غیر تکراری می توان نوشت که عبارت اند از :

۱۲۳	۱۲۴	۱۲۵	۱۳۴	۱۳۵	۱۴۵	۲۳۴	۲۳۵	۲۴۵	۳۴۵
۱۳۲	۱۴۲	۱۵۲	۱۴۳	۱۵۳	۱۵۴	۲۴۳	۲۵۳	۲۵۴	۳۵۴
۲۱۳	۲۱۴	۲۱۵	۳۱۴	۳۱۵	۴۱۵	۳۲۴	۳۲۵	۴۲۵	۴۳۵
۲۳۱	۲۴۱	۲۵۱	۳۴۱	۳۵۱	۴۵۱	۳۴۲	۳۵۲	۴۵۲	۴۵۳
۳۱۲	۴۱۲	۵۱۲	۴۱۳	۵۱۳	۵۱۴	۴۲۳	۵۲۳	۵۲۴	۵۳۴
۳۲۱	۴۲۱	۵۲۱	۴۳۱	۵۳۱	۵۴۱	۴۳۲	۵۳۲	۵۴۲	۵۴۳

به شش عدد هر ستون نگاه کنید. چه ویژگی ای دارند؟

۲ با توجه به ستون های جدول بالا چگونه می توانیم تمام زیر مجموعه های سه عضوی مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ را بنویسیم؟ این زیر مجموعه ها چندتا هستند؟ آنها را بنویسید.

$\{1, 2, 3\}$ و

۳ چه تفاوتی در فعالیت ۱ و ۲ وجود داشت که تعداد حالت های مورد نظر آنها را متمایز کرد؟

۴ هر ستون در فعالیت ۱ چند زیر مجموعه سه عضوی از فعالیت ۲ را به دست می دهد؟

۵ با توجه به فعالیت ۴، از تقسیم جواب فعالیت ۱ بر چه عددی تعداد زیر مجموعه های فعالیت ۲ حاصل می شود؟ این عدد را چگونه می توان به دست آورد؟

نتیجه : همان طور که مشاهده کردید، در فعالیت ۱ ترتیب قرار گرفتن هر سه عدد انتخاب شده در کنار هم اهمیت دارد؛ اما در فعالیت ۲ تمام ۶ روش چینش هر سه عدد انتخاب شده یک زیر مجموعه سه عضوی از مجموعه A را مشخص می کند؛ یعنی در واقع هر زیر مجموعه ۳ عضوی، یک حالت را مشخص می کند و فقط تعداد زیر مجموعه های سه عضوی از پنج عضو مورد نظر اهمیت دارد.

از طرفی می دانیم تعداد جایگشت های r شیء از n شیء متمایز برابر است با :

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

بنابراین با توجه به فعالیت‌های ۱ تا ۶ تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی از n شیء متمایز برابر است با:

$$\frac{P(n, r)}{r!}$$

به هر انتخاب r شیء از n شیء متمایز که در آن ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد یا به عبارتی به هر زیرمجموعه r عضوی از یک مجموعه n عضوی، یک ترکیب r تایی از n شیء می‌گوییم. تعداد ترکیب‌های r تایی از n شیء متمایز را معمولاً با $C(n, r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad (0 \leq r \leq n)$$

مثال

از میان شش کتاب مختلف

الف به چند طریق می‌توانیم چهار کتاب را در یک قفسه کنار هم بچینیم؟

ب به چند طریق می‌توانیم چهار کتاب را برای هدیه دادن به یک نفر انتخاب کنیم؟

حل:

الف) چون ترتیب چیدن کتاب‌ها در قفسه مهم است لذا جواب برابر است با تعداد جایگشت‌های

$$P(6, 4) = \frac{6!}{(6-4)!} = 360 \text{ یعنی: متمایز؛ یعنی}$$

ب) چون ترتیب انتخاب کتاب‌ها اهمیتی ندارد لذا فقط باید تعداد انتخاب‌های چهار شیء از شش شیء متمایز؛ یعنی تعداد زیرمجموعه‌های چهارتایی از شش شیء متمایز را محاسبه کرد که برابر است با:

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{(6-4)!4!} = 15$$

مثال

در یک دوره مسابقات کشتی از بین ۴ داور ایرانی، ۳ داور ژاپنی و ۲ داور روسی قرار است کمیته‌ای از داوران تشکیل شود. به چند روش می‌توان این کار را انجام داد اگر:

الف کمیته ۴ نفره باشد؟

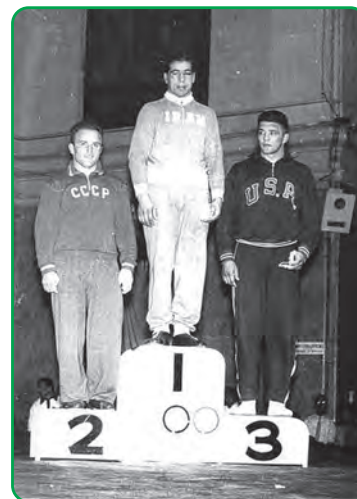
ب کمیته ۳ نفره باشد و از هر یک از سه کشور یک نفر در کمیته باشد؟

پ کمیته ۵ نفره باشد و دقیقاً دو داور ایرانی داشته باشد؟

ت کمیته ۵ نفره باشد و حداقل ۳ داور ایرانی داشته باشد؟

ث کمیته ۷ نفره باشد و شامل ۳ داور ایرانی، ۲ داور ژاپنی و ۲ داور روسی باشد؟

ج کمیته ۵ نفره باشد و حداقل یک داور ایرانی داشته باشد؟



غلامرضا تختی، قهرمان جهان

حل:



علیرضا سلیمانی، قهرمان سنگین وزن جهان

الف) چون فرقی ندارد که ۴ نفر انتخاب شده از کدام کشور باشند، تنها تعداد زیرمجموعه‌های ۴ نفره از این ۹ نفر مورد نظر است که برابر است با:

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{5!4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$$

ب) تعداد روش‌های انتخاب یک داور ایرانی برابر است با: $\binom{4}{1} = 4$. به همین طریق ۳ راه برای انتخاب داور ژاپنی و ۲ راه برای انتخاب داور روسی وجود دارد. طبق اصل ضرب تعداد روش‌های انجام این کار برابر است با:

$$4 \times 3 \times 2 = 24$$

پ) تعداد راه‌های انتخاب دو داور ایرانی برابر است با: $\binom{4}{2} = 6$. حال ۳ داور دیگر باید از

بین ۵ داور غیرایرانی انتخاب شوند که به $\binom{5}{3} = 10$ حالت می‌توانند انتخاب شوند. بنابراین

طبق اصل ضرب، تعداد روش‌های انجام کار برابر است با:

$$6 \times 10 = 60$$

ت) در این حالت تعداد داوران ایرانی ۳ یا ۴ نفر می‌تواند باشد. در حالتی که داوران ایرانی

۳ نفر باشند، این داوران به $\binom{4}{3} = 4$ حالت می‌توانند انتخاب شوند. در این صورت دو نفر

دیگر باید از بین ۵ داور غیرایرانی انتخاب شوند که این کار به $\binom{5}{2} = 10$ طریق می‌تواند انجام شود. پس طبق اصل ضرب $4 \times 10 = 40$ روش وجود دارد.

در حالتی که داوران ایرانی ۴ نفر باشند، انتخاب این ۴ داور به $\binom{4}{4} = 1$ روش صورت می‌گیرد

و یک داور دیگر باید از بین ۵ داور غیرایرانی انتخاب شود که به $\binom{5}{1} = 5$ طریق می‌تواند

صورت گیرد. پس طبق اصل ضرب، برای این حالت $5 \times 1 = 5$ روش وجود دارد و جواب کل برابر است با $40 + 5 = 45$.

ث) تعداد روش‌های انتخاب ۳ داور ایرانی برابر است با: $\binom{4}{3} = 4$ ، تعداد روش‌های انتخاب

۲ داور ژاپنی برابر است با: $\binom{3}{2} = 3$ و تعداد راه‌های انتخاب ۲ داور روس برابر است با:

$$\binom{2}{2} = 1 \text{ لذا طبق اصل ضرب، جواب برابر است با: } 4 \times 3 \times 1 = 12$$

ج) می‌دانیم تعداد کل کمیته‌های ۵ نفره که می‌توان انتخاب کرد، برابر است با $\binom{9}{5} = 126$.

از طرفی این کمیته‌های ۵ نفره به دو دسته زیر تقسیم می‌شوند:

دسته اول: حداقل یک ایرانی در آنهاست.

دسته دوم: هیچ داور ایرانی در آنها نیست.
جمع افراد این دو دسته برابر ۱۲۶ می شود و از آنجا که محاسبه دسته دوم آسان تر است، کافی است تعداد دسته دوم را محاسبه کنیم و از ۱۲۶ کم کنیم.

اما تعداد افراد دسته دوم برابر $\binom{5}{5} = 1$ است. چرا؟

لذا تعداد افراد دسته اول برابر است با: $125 = 126 - 1$

کار در کلاس

۱ در کدام یک از موارد زیر، ترتیب قرار گرفتن اشیاء اهمیت دارد و باید تعداد جایگشت های r شیء از n شیء متمایز مشخص شود و در کدام یک ترتیب قرار گرفتن اشیاء اهمیت ندارد و باید تعداد ترکیب های r تایی از n شیء متمایز مشخص شود؟
(الف) ساختن کلمه ای سه حرفی بدون حرف تکراری با ۵ حرف متمایز (بامعنی و بی معنی).
(ب) انتخاب سه شاخه گل از بین پنج شاخه گل متمایز.
(پ) انتخاب یک دفاع چپ، یک دفاع راست و یک دفاع وسط از بین هفت مدافع که همگی در تمامی پست ها توانایی بازی دارند.
(ت) از بین هفت بازیکن دفاعی یک تیم سه نفر قرار است از تیم کنار گذاشته شوند.
(ث) ده نفر در یک دوره مسابقات شرکت خواهند کرد و سه نفر اول به المپیک راه خواهند یافت.
(ج) ده نفر در یک مسابقه شرکت کرده اند و قرار است به نفرات اول تا سوم به ترتیب مدال های طلا، نقره و برنز داده شود.

۲ در هر کدام از موارد «کاردر کلاس ۱» تعداد حالت های ممکن را بنویسید. (نیاز به ساده کردن جواب نیست)

۳ از میان ۸ ریاضی دان و ۶ فیزیک دان و ۵ شیمی دان قرار است کمیته ای علمی انتخاب شود. به چند طریق این کمیته می تواند انتخاب شود هرگاه:
(الف) کمیته ۶ نفره باشد و از هر رشته ۲ نفر در آن عضو باشند؟
(ب) کمیته ۳ نفره باشد و از هر رشته حداقل یک نفر در آن عضو باشند؟
(پ) کمیته ۲ نفره باشد و حداقل یک ریاضی دان در آن باشد؟

فعالیت

از بین دو مدرس ریاضی، دو مدرس فیزیک و دو مدرس شیمی، قرار است یک کمیته دو نفره انتخاب شود، به گونه ای که دو نفر انتخاب شده هم رشته نباشند. چند حالت برای انجام این کار وجود دارد؟

به جواب‌های چند دانش‌آموز به سؤال بالا که در زیر آمده است، دقت کنید.
 محمد: از دو رشته باید هر کدام یک نفر انتخاب شوند و از رشته سوم کسی انتخاب نشود؛
 لذا سه حالت زیر را می‌توان در نظر گرفت:

ریاضی یک نفر انتخاب شود؛ فیزیک یک نفر انتخاب شود و شیمی کسی انتخاب نشود.

$$\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{0} = 2 \times 2 \times 1 = 4$$

ریاضی یک نفر انتخاب نشود؛ فیزیک کسی انتخاب نشود و شیمی یک نفر انتخاب شود.

$$\binom{2}{1}\binom{2}{0}\binom{2}{1} = 2 \times 1 \times 2 = 4$$

ریاضی کسی انتخاب نشود؛ فیزیک یک نفر انتخاب شود و شیمی هم یک نفر انتخاب نشود.

$$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{1} = 1 \times 2 \times 2 = 4$$

پس در کل $4 + 4 + 4 = 12$ حالت امکان دارد.

پژمان: می‌توان روش محمد را خلاصه‌تر کرد؛ یعنی در یک مرحله ابتدا تعداد حالت‌های

انتخاب دو رشته‌ای را که قرار است از آنها کسی انتخاب شود، محاسبه می‌کنیم که به $\binom{3}{2}$

راه امکان دارد. حال از هر کدام از دو رشته انتخاب شده به دو راه می‌توان یک فرد انتخاب

کرد؛ لذا جواب برابر است با: $12 = \binom{3}{2} \times 2 \times 2$.

حمید: ولی به نظر من مستقیماً با اصل ضرب به روش زیر می‌توان آن را حل کرد.

اولین فرد انتخاب شونده می‌تواند هر کدام از ۶ نفر باشد؛ پس ۶ حالت برای انتخاب اولین فرد وجود دارد. اما وقتی اولین فرد انتخاب شد، دومین فردی که قرار است انتخاب شود، نمی‌تواند هم رشته او باشد؛ پس برای انتخاب دومین فرد چهار راه وجود دارد. بنابراین تعداد کل راه‌های انتخاب برابر $24 = 6 \times 4$ حالت است.

— دو نفر مدرس ریاضی را M_1 و M_2 ، دو نفر مدرس فیزیک را P_1 و P_2 ، و دو نفر مدرس شیمی را C_1 و C_2 در نظر بگیرید و تمام حالت‌های ممکن برای آنها را بنویسید و جواب غلط را مشخص کنید.

نمودار درختی جواب غلط را بکشید. سپس علت غلط بودن آن را مشخص کنید.

فعالیت

۱ می‌دانیم که $\binom{n}{r}$ همان تعداد زیر مجموعه‌های r تایی از یک مجموعه n عضوی است.

حال $\binom{n}{0}$ و $\binom{n}{1}$ را یک بار با توجه به این تعبیر از $\binom{n}{r}$ ، و یک بار با فرمول، به دست آورید.

به زمین می‌روند	به زمین نمی‌روند
۱, ۲, ۳	۴, ۵
۱, ۲, ۴	۳, ۵

۲ الف) یک مربی قصد دارد از بین بازیکنان شماره‌های ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱، سه نفر را برای رفتن به زمین بازی انتخاب کند. چند حالت برای این کار امکان دارد؟
با پرکردن جدول مقابل تمام حالات را نمایش دهید.

ب) این بار این مربی قصد دارد از بین همان بازیکنان دو بازیکن انتخاب کند که روی نیمکت بنشینند. چه انتخاب‌هایی دارد؟

پ) بین تعداد انتخاب‌های $\binom{5}{2}$ و $\binom{5}{3}$ چه رابطه‌ای هست؟ چگونه این رابطه را توجیه می‌کنید؟
ت) درستی تساوی $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ را یک بار با استفاده از توجیه بالا و یک بار با استفاده از فرمول بررسی کنید.

۳ جاهای خالی را پر کنید.

الف) تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی از مجموعه حروف انگلیسی برابر است با: $\binom{26}{5}$
ب) تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی از مجموعه حروف انگلیسی که حرف a در آنها هست برابر است با: $\binom{25}{5}$

پ) تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی از مجموعه حروف انگلیسی که حرف a در آنها نیست، برابر است با: $\binom{25}{5}$

ت) بنابراین: $\binom{26}{5} = \binom{25}{5} + \binom{25}{5}$

۴ فرض کنیم A یک مجموعه n عضوی و a یکی از اعضای آن باشد. ($a \in A$)

الف) تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی مجموعه A برابر است با: $\binom{n}{r}$

ب) تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی A که a در آنها هست، برابر است با: $\binom{n-1}{r-1}$

پ) تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی A که a در آنها نیست، برابر است با: $\binom{n-1}{r}$

ت) بنابراین: $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$

۱ یک فروشنده تنقلات در فروشگاه خود، پسته، بادام، گردو، تخمه کدو، تخمه زاپنی، نخودچی و کشمش دارد. از نظر او در یک آجیل حداقل پنج نوع از تنقلات فوق باید وجود داشته باشد. او با تنقلات موجود در فروشگاهش چند نوع آجیل می‌تواند درست کند؟

۲ یک اداره دارای ۱۸ عضو است. این اداره دارای ۱ رئیس، ۳ معاون، ۲ حسابدار، ۶ کارشناس اداری، ۳ کارمند کارگزینی و ۳ کارشناس امور حقوقی است. این اداره ماهانه باید جلسه‌ای ۵ نفره جهت بررسی و تصویب آخرین طرح‌های پیشنهادی برگزار کند. به چند طریق این گروه ۵ نفره می‌تواند انتخاب شود، هرگاه:

الف) رئیس و دقیقاً یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

ب) رئیس و دقیقاً یک معاون و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

پ) رئیس و دقیقاً یک معاون، یک حسابدار و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

۳ در یک کلاس تعدادی از دانش‌آموزان که همگی دارای شرایط علمی خوبی‌اند، داوطلب حضور در مسابقات علمی مدرسه هستند. معلم قصد دارد ۲ نفر را به تصادف انتخاب کند. او این دو نفر را به ۲۸ روش می‌تواند از بین داوطلبان انتخاب کند. تعداد داوطلبان چند نفر بوده است؟

۴ گل فروشی در فروشگاه خود ۱۰ نوع گل مختلف دارد. او در هر دسته گل از ۳ تا ۵ شاخه گل متمایز قرار می‌دهد. او چند دسته گل مختلف می‌تواند درست کند؟

۵ یک نقاش قوطی‌هایی از ۴ رنگ قرمز، آبی، زرد و مشکی دارد. اگر او با ترکیب دو یا چند قوطی از رنگ‌های متمایز بتواند دقیقاً یک رنگ جدید به‌دست آورد، او چند رنگ می‌تواند داشته باشد؟

چرا با اینکه در کارهای هنری فقط از همین ۴ رنگ استفاده می‌شود، اما تعداد رنگ‌های حاصل بیشتر از جواب شماست؟

۶ هفت نقطه A و B و C و D و E و F و G روی محیط یک دایره قرار دارند. چند مثلث مختلف می‌توان کشید که رئوس آن از این هفت نقطه انتخاب شده باشند؟

۷ یک آشپز ده نوع ادویه دارد. او با استفاده از هر ۳ تا از این ادویه ها یک طعم مخصوص درست می کند. این آشپز چند طعم می تواند درست کند هرگاه

(الف) هیچ محدودیتی در استفاده از ادویه ها نداشته باشد؟

(ب) دو نوع ادویه هستند که با هم نمی توانند استفاده شوند؟

(پ) سه ادویه هستند که نباید هر سه با هم استفاده شوند؟

(ت) ادویه ها به ۲ دسته ۵ تایی تقسیم می شوند که هیچ یک از ادویه های دسته اول با هیچ یک از ادویه های دسته دوم سازگاری ندارند؟

۸ مسئله ای طرح کنید که جواب آن برابر باشد با :

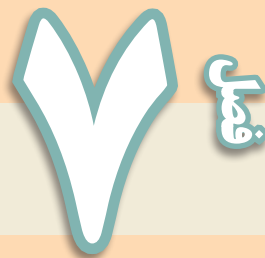
$$\text{الف) } \binom{6}{2} \times \binom{5}{3}$$

$$\text{ب) } \binom{6}{2} + \binom{5}{3}$$

اشترانکوه، لرستان



آمار و احتمال



امروزه آمار و احتمال به عنوان یک علم پرکاربرد در همهٔ علوم از جمله علوم پزشکی، علوم فنی و مهندسی، هواشناسی، محیط زیست و ... استفاده می‌شود.



آمار و احتمال در پزشکی



آمار و احتمال در کشاورزی



آمار و احتمال در مهندسی کامپیوتر



آمار و احتمال در محیط زیست

درس اول
احتمال یا اندازه‌گیری شانس

درس دوم
مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه

درس سوم
متغیر و انواع آن

درس اول: احتمال یا اندازه گیری شانس

مقدمه

پیشامدهایی وجود دارند که ممکن است رخ بدهند یا رخ ندهند و ما از چگونگی رخ دادن آنها اطلاع نداریم. به عنوان مثال تا زمانی که سکه را پرتاب نکرده ایم، نتیجه پرتاب سکه (پشت یا رو آمدن آن)، مشخص نیست. چنین پدیده‌ها یا آزمایش‌هایی را که نتیجه آن به طور دقیق قابل پیش‌بینی نباشد؛ اما از همه حالت‌های ممکن در به وقوع پیوستن آنها، مطلع باشیم، پدیده‌ها یا آزمایش‌های تصادفی می‌نامیم. به عنوان مثال نتیجه یک بازی فوتبال از قبل، قابل پیش‌بینی نیست؛ اما سه حالت پیروزی، تساوی و باخت برای هر یک از تیم‌ها وجود دارد که ممکن است اتفاق بیفتد. همان‌طور که در سال قبل خواندید، مجموعه شامل همه این حالت‌های ممکن، فضای نمونه‌ای نامیده می‌شود. اگر این مجموعه را S بنامیم، هر زیر مجموعه S مانند A را یک پیشامد تصادفی در S می‌نامیم.



پیشامدهای تصادفی

فعالیت

۱ اگر دو تاس آبی و قرمز را با هم بیندازیم، همه حالت‌های ممکن را می‌توان در جدول زیر مشاهده کرد. ابتدا این جدول را کامل کنید و از طریق اصل ضرب درستی تعداد کل حالت‌های موجود در جدول را بررسی کنید؛ سپس به سؤال‌ها پاسخ دهید :

 	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	(۱,۱)	(۱,۲)			(۱,۵)	
۲	(۲,۱)		(۲,۳)			(۲,۶)
۳			(۳,۳)		(۳,۵)	
۴		(۴,۲)				
۵						(۵,۶)
۶	(۶,۱)					(۶,۶)



۲ قطر آبی رنگ چه پیشامدی را نشان می دهد؟

۳ خانه های مربوط به حالت هایی را که هر دو عدد رو شده زوج و هر دو عدد رو شده فردند هاشور بزنید؛ چه الگویی به دست می آید؟

۴ با توجه به جدول، یک مسئله طرح کنید و پاسخ آن را توضیح دهید.

۵ با توجه به جدول و قطرهای آن، تعداد حالت ها برای مجموع دو تاس، در چه اعدادی برابر است؟ (راهنمایی: به عنوان مثال، تعداد حالت ها برای مجموع ۵ و مجموع دو تاس ۹، برابر است)

کار در کلاس

فرض کنید می خواهیم یک تاس و یک سکه را با هم بیندازیم:

۱ آیا می توانید نتیجه حاصل را به صورت قطعی بیان کنید؟

۲ آیا این پدیده یا آزمایش، تصادفی است؟ چرا؟

۳ همه حالت های ممکن را بنویسید (فضای نمونه ای را تشکیل دهید).

۴ تعداد این حالت ها را با استفاده از اصل ضرب به دست آورید.

۵ جدول 2×6 یا 6×2 مربوط به این آزمایش را رسم کنید.



مثال ۱

فرض کنید خانواده ای ۴ فرزند دارد؛ اما از جنسیت فرزندان این خانواده اطلاع نداریم. اگر ترتیب به دنیا آمدن فرزندان اهمیت داشته باشد، با توجه به اصل ضرب تعداد همه حالت های ممکن برای فرزندان این خانواده عبارت است از: $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$. حالت (پ، پ، د، پ) به معنای این است که فرزند اول یا بزرگ تر در این خانواده پسر و فرزند دوم دختر و فرزند سوم و چهارم، پسر هستند. حالت (د، پ، پ، پ) را شما توضیح دهید.

پیشامدهای زیر را در نظر بگیرید و جاهای خالی را پر کنید:

الف) پیشامد اینکه «دقیقاً یک دختر در این خانواده متولد شده باشد» $A =$

$A = \{(د، پ، پ، پ) و (پ، پ، د، پ) و (پ، پ، پ، د) و (پ، د، پ، پ) و (د، د، پ، پ) و (د، پ، د، د) و (پ، د، د، د) و (د، د، د، د)\}$

ب) پیشامد اینکه «حداکثر یک دختر در خانواده متولد شده باشد» $B =$

$B = \{(پ، پ، پ، پ) و (پ، پ، د، پ) و (پ، د، پ، پ) و (د، پ، پ، پ) و (د، د، پ، پ) و (د، پ، د، د) و (د، د، د، د)\}$



پ پیشامد اینکه «تعداد فرزندان پسر و دختر برابر باشند» $C =$

$$C = \{(پ، پ، د، د) و (پ، د، د، د) و (د، د، د، پ) و (د، پ، د، پ) و (پ، پ، پ، پ) و (پ، د، پ، پ) و (د، پ، پ، پ) و (د، د، پ، پ) و (پ، د، د، پ) و (پ، پ، د، د) و (د، پ، د، پ) و (د، د، پ، پ)\}$$

ت پیشامد اینکه «تعداد فرزندان پسر از دختر بیشتر باشد» $D =$

$$D = \{(پ، پ، پ، پ) و (پ، پ، پ، د) و (پ، پ، د، پ) و (پ، د، پ، پ) و (پ، د، پ، د) و (پ، د، د، پ) و (د، پ، پ، پ) و (د، پ، پ، د) و (د، پ، د، پ) و (د، د، پ، پ) و (د، د، پ، د) و (د، د، د، پ)\}$$

مثال ۲

در جعبه‌ای ۳ مهره قرمز متفاوت (با شماره‌های ۱ تا ۳) و ۲ مهره آبی متفاوت (با شماره‌های ۱ و ۲) وجود دارد. اگر ۳ مهره به تصادف از این جعبه خارج شود، تعداد حالت‌های ممکن در

$$\binom{5}{3} = 10$$

انتخاب ۳ مهره از بین ۵ مهره، عبارت است از ۱۰. زیرا ترتیب انتخاب مهم نیست. بنابراین فضای نمونه‌ای به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$S = \{R_1 R_2 R_3, R_1 R_2 B_1, R_1 R_2 B_2, R_1 R_3 B_1, R_1 R_3 B_2, R_2 R_3 B_1, R_2 R_3 B_2, B_1 B_2 R_1, B_1 B_2 R_2, B_1 B_2 R_3\}$$

اگر پیشامدهای «حداقل ۱ مهره آبی انتخاب شود» و «حداکثر ۱ مهره آبی انتخاب شود» و «هر سه مهره قرمز انتخاب شود» را به ترتیب A و B و C بنامیم؛ خواهیم داشت:

$$A = \{B_1 R_1 R_2, B_1 R_1 R_3, B_1 R_2 R_3, B_2 R_1 R_2, B_2 R_1 R_3, B_2 R_2 R_3\}$$

$$B = \{B_1 R_1 R_2, B_1 R_1 R_3, B_1 R_2 R_3, B_2 R_1 R_2, B_2 R_1 R_3, B_2 R_2 R_3\}$$

$$C = \{R_1 R_2 R_3\}$$

اگر S را مجموعه مرجع فرض کنیم، متمم A یعنی A' با کدام یک از مجموعه‌های B یا C برابر است؟

پیشامدها و برخی اعمال روی آنها

اگر A و B پیشامدهایی در فضای نمونه‌ای S باشند، در این صورت هر یک از پیشامدهای $(A \cup B)$ ، $(A \cap B)$ و $(A - B)$ در فضای نمونه‌ای S به صورت‌های زیر توصیف می‌شوند:

الف) اجتماع دو پیشامد:

پیشامد $(A \cup B)$ وقتی رخ می‌دهد (اتفاق می‌افتد) که حداقل یکی از دو پیشامد رخ بدهد.

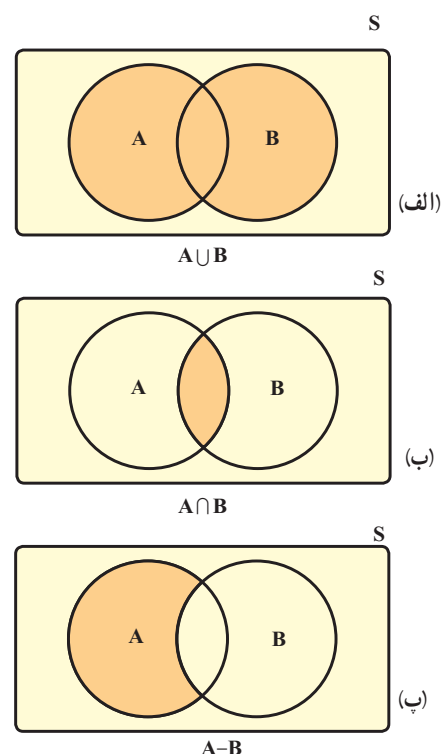
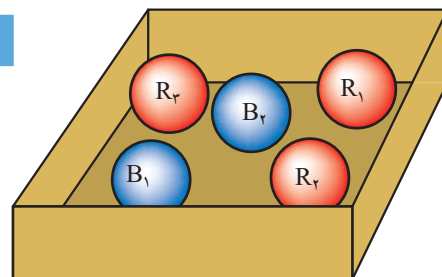
(یا A رخ بدهد یا B رخ بدهد یا هر دو رخ بدهند.)

ب) اشتراک دو پیشامد:

پیشامد $(A \cap B)$ وقتی رخ می‌دهد که دو پیشامد با هم رخ بدهند (هم پیشامد A رخ بدهد و هم پیشامد B رخ بدهد).

پ) تفاضل دو پیشامد:

پیشامد $(A - B)$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ بدهد و پیشامد B رخ ندهد.



پیشامد آنکه $(A-C)$ رخ بدهد؛ یعنی «هر دو تاس فرد باشند، ولی» پس داریم:

$$A-C = \{(1,1), (1,3), (1,5), \dots, (5,5)\}$$

پیشامد $(C-B)$ را توصیف کنید و آن را تشکیل دهید.

اگر پیشامد D را «مجموع دو تاس، عدد ۷ باشد» و پیشامد E را «هر دو تاس زوج باشند» تعریف کنیم، آیا D و E ناسازگارند؟ چرا؟

۲ تاسی را می‌اندازیم، روی فضای نمونه‌ای حاصل، پیشامدهای A و B و C را طوری تعریف کنید که:

الف A و B ناسازگار باشند.

ب A و B و C دو به دو ناسازگار باشند.

پ $(A \cap B)$ و C ناسازگار باشند.

مثال ۵

یک تاس و ۲ سکه را با هم می‌اندازیم:

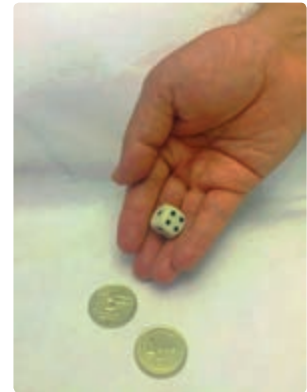
الف فضای نمونه‌ای چند عضو دارد؟

$$n(S) = 2 \times 2 \times \dots = \dots$$

ب پیشامد آنکه «هر دو سکه رو و تاس زوج باشد» را تشکیل دهید.

$$A = \{(r, r, 2), \dots, \dots\}$$

پ پیشامد آنکه «هر دو سکه پشت یا تاس عدد ۵ بیاید» را تشکیل دهید.



$$B = \{(p, p, 1), (p, p, 2), (p, p, 3), (p, p, 4), (p, p, 5), (p, p, 6), (p, r, 1), (p, r, 2), (p, r, 3), (p, r, 4), (p, r, 5), (p, r, 6), (r, p, 1), (r, p, 2), (r, p, 3), (r, p, 4), (r, p, 5), (r, p, 6), (r, r, 1), (r, r, 2), (r, r, 3), (r, r, 4), (r, r, 5), (r, r, 6)\}$$

احتمال رخداد یک پیشامد (اندازه‌گیری شانس)

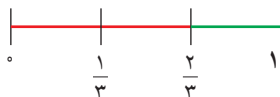
می‌دانیم اگر S فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی باشد و $A \subseteq S$ یک پیشامد در فضای S باشد، احتمال رخداد پیشامد A یعنی $P(A)$ که به صورت $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ تعریف می‌شود، عددی است حقیقی که $0 \leq P(A) \leq 1$. همچنین می‌دانیم $P(A)$ هر چقدر به ۱ نزدیک‌تر باشد، شانس رخداد A بیشتر و هر چقدر به صفر نزدیک‌تر باشد، شانس رخداد A کمتر است. در واقع در مسائل احتمال با محاسبه $P(A)$ شانس رخداد پیشامد A را اندازه‌گیری می‌کنیم.



مثال ۱

فرض کنیم هر یک از اعداد دو رقمی را که با ارقام ۲ و ۳ و ۴ و بدون تکرار رقم می‌توانیم بسازیم، روی یک کارت می‌نویسیم و آنها را در کیسه‌ای قرار می‌دهیم. سپس یک کارت به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم:

اگر پیشامدهای A و B را به ترتیب «خارج شدن عدد زوج» و «خارج شدن عدد فرد» تعریف کنیم، شانس رخداد کدام پیشامد بیشتر است؟



$$S = \{43, 34, 24, 42, 23, 32\}$$

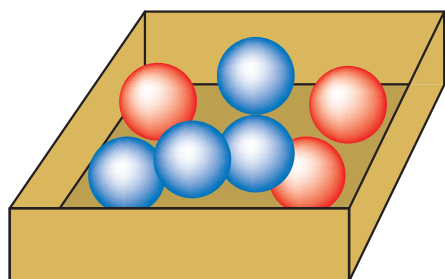
$$A = \{34, \dots, 32\}, B = \{\dots, \dots\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

واضح است که $P(A) > P(B)$ ، پس شانس رخداد پیشامد A از شانس رخداد پیشامد B بیشتر است. (در این مثال تعداد عددهای زوج از تعداد عددهای فرد، بیشتر است)

مثال ۲

در جعبه‌ای ۴ مهره آبی و ۳ مهره قرمز وجود دارد. اگر از این جعبه سه مهره به تصادف خارج کنیم، چقدر احتمال دارد:



الف) $n(S) = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = 35$

ب) $P(A) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{4}{35}$

پ) $P(B) = \frac{\binom{4}{2} + \binom{3}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{1}{7}$
یا هر سه مهره آبی، یا هر سه قرمز

پ) $P(C) = \frac{\binom{4}{2} \times \binom{3}{1} + \binom{3}{2} \times \binom{4}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{18 + 12}{35} = \frac{6}{7}$
دو مهره قرمز و یک مهره آبی یا دو آبی و یک قرمز

الف) هر سه مهره آبی باشند.

ب) هر سه مهره هم‌رنگ باشند.

پ) دقیقاً ۲ مهره هم‌رنگ باشند.

شعاعیت

اگر S فضای نمونه‌ای متناهی و ناتهی برای یک آزمایش تصادفی باشد و A و B پیشامدهایی در این فضا باشند، در این صورت:

$$I) 0 \leq P(A) \leq 1$$

زیرا: $A \subseteq S \Rightarrow 0 \leq n(A) \leq \dots \Rightarrow \frac{0}{n(S)} \leq \frac{n(A)}{n(S)} \leq \dots \Rightarrow 0 \leq \dots \leq 1$

$$II) P(\emptyset) = 0, P(S) = 1$$



آندری نیکولایویچ کولموگوروف ریاضی‌دان اهل روسیه بود که دستاوردهای برجسته‌ای در زمینه‌های احتمال دارد. او برای اولین بار در سال ۱۹۳۳ میلادی اصولی تحت عنوان اصول احتمال را معرفی کرد.

زیرا $P(\emptyset) = \frac{n(\emptyset)}{n(S)} = \frac{0}{n(S)} = 0$, $P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = 1$

III) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

زیرا $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \xrightarrow{\text{تقسیم طرفین بر } n(S)}$

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

برای هر دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S ، همواره تساوی زیر برقرار است:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، این تساوی به صورت زیر نوشته می شود:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

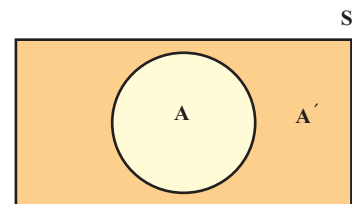
کار در کلاس

اگر A' متمم پیشامد A در فضای نمونه‌ای S باشد، A و A' ناسازگارند نشان دهید.

$$P(A) = 1 - P(A')$$

می دانیم $P(A \cup A') = P(S) = \dots\dots\dots$

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A') \Rightarrow P(A) + P(A') = 1 \Rightarrow \begin{cases} P(A) = \dots\dots\dots \\ P(A') = \dots\dots\dots \end{cases}$$



مثال ۱

اگر دو تاس را با هم بیندازیم، چقدر احتمال دارد:

الف هر دو تاس زوج باشند؟ (می دانیم در انداختن دو تاس $n(S) = 6^2 = 36$)

$A = \{(2,2), (2,4), (4,2), \dots, (6,6)\}$ پیشامد هر دو زوج

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

ب مجموع دو تاس ۸ یا هر دو تاس فرد باشند

$B = \{(3,5), (5,3), (2,6), (6,2), (4,4)\}$ مجموع دو تاس ۸

$C = \{(1,1), (1,3), (3,1), (3,3), (5,1), (1,5), (3,5), (5,3), (5,5), (1,5), (5,1), (3,3), (3,1), (1,3), (1,1)\}$ هر دو تاس فرد

- ۱) هر یک از اعداد طبیعی و زوج کوچک‌تر از ۱۱ را روی یک کارت می‌نویسیم و یکی از این کارت‌ها را به تصادف برمی‌داریم:
- (الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش یا پدیده تصادفی را مشخص کنید.
- (ب) چه تعداد پیشامد تصادفی را روی این فضای نمونه‌ای می‌توان تعریف کرد؟
- (پ) پیشامد A را که در آن «عدد روی کارت انتخاب شده بر ۴ بخش پذیر باشد»، مشخص کنید.
- ۲) فرض کنید A و B و C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند. هر یک از عبارت‌های توصیفی زیر را با نمودار ون نمایش دهید و هاشور بزنید.
- (الف) پیشامدهای A و C رخ بدهند؛ ولی B رخ ندهد.
- (ب) فقط پیشامد B رخ بدهد.
- (پ) پیشامد B رخ بدهد و C رخ ندهد.
- ۳) هر یک از ارقام ۱ تا ۸ را روی یک کارت می‌نویسیم و آنها را در یک کیسه قرار می‌دهیم؛ سپس یک کارت به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. هر یک از پیشامدهای زیر را تعیین کنید:
- (الف) فضای نمونه‌ای و پیشامد A که در آن «عدد روی کارت زوج باشد».
- (ب) پیشامد B که در آن «عدد روی کارت اول باشد».
- (پ) پیشامد C که در آن «عدد رو شده بزرگ‌تر از ۲ باشد».
- ۴) خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. فضای نمونه‌ای مربوط به فرزندان این خانواده را و پیشامد آنکه حداقل یکی از فرزندان دختر باشد را مشخص کنید.
- ۵) سکه‌ای را به هوا می‌اندازیم. اگر پشت بیاید، یک تاس می‌اندازیم و اگر رو بیاید دو سکه دیگر را می‌اندازیم:
- (الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.
- (ب) پیشامد آنکه «تاس زوج بیاید» را مشخص کنید.
- (پ) پیشامد آنکه «حداقل ۲ سکه رو بیاید» را مشخص کنید.
- ۶) می‌خواهیم از بین ۳ دانش‌آموز کلاس دهم رشته ریاضی و ۲ دانش‌آموز دهم رشته تجربی یک تیم دو نفره تنیس روی میز انتخاب کنیم. اگر این عمل به تصادف صورت پذیرد، چقدر احتمال دارد:
- (الف) هر دو نفر، از دانش‌آموزان کلاس دهم ریاضی باشند؟
- (ب) هر دو نفر، هم‌رشته باشند؟
- (پ) ۱ نفر از رشته ریاضی و ۱ نفر از رشته تجربی باشد؟

۷ یک فروشگاه دو نوع کارت اعتباری A و B را می‌پذیرد. اگر ۳۴ درصد از مشتریان کارت نوع A ($P(A) = \frac{34}{100}$) و ۶۲ درصد کارت نوع B و ۱۵ درصد هر دو کارت را همراه داشته باشند، چقدر احتمال دارد مشتریان با در اختیار داشتن حداقل یکی از این دو کارت از این فروشگاه خرید کنند؟

۸ اگر ۷ نفر که دو نفر آنها با هم برادرند، به تصادف در یک ردیف قرار بگیرند، چقدر احتمال دارد :
الف) دو برادر کنار یکدیگر نباشند؟
ب) یکی از آنها در ابتدای ردیف و دیگری در انتهای ردیف قرار بگیرند؟

۹ اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند و $A \subseteq B$ ، ثابت کنید، $P(A) \leq P(B)$.



ما در عصر احتمال به سر می‌بریم

در عصر شک و شاید

در عصر پیش بینی وضع هوا

از هر طرف که باد بیايد

در عصر قاطعیت تردید

عصر جدید

عصری که هیچ اصلی

جز اصل احتمال، یقینی نیست

اما من

بی نام تو

حتی

یک لحظه احتمال ندارم

چشمان تو

عین الیقین من

قطعیت نگاه تو

دین من است

من از تو ناگزیرم

من

بی نام ناگزیر تو می‌میرم

قیصر امین پور

درس دوم: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه



آیا تاکنون به نقش اعداد و ارقام در زندگی روزمره یک خانواده فکر کرده‌اید؟

خانواده‌ای را که شامل پدر، مادر و فرزندان است، در نظر بگیرید. اعضای این خانواده در فصل بهار، می‌خواهند به یک مسافرت تفریحی به یکی از شهرهای کشور بروند.

برای این منظور پدر و مادر خانواده با پیگیری اخبار هواشناسی، به دنبال تعیین مناسب‌ترین زمان برای مسافرت خود هستند. در این اخبار، کارشناس هواشناسی می‌گوید:

«براساس اعداد و ارقام جمع‌آوری شده، درباره میزان دمای هوا، رطوبت جوی و بارش باران طی ده روز گذشته و با استفاده از روش‌های مدل‌بندی هواشناسی، پیش‌بینی می‌شود، دمای هوا طی سه روز آینده ۵ درجه گرم‌تر شود و بدون تغییر در میزان رطوبت جوی، هوا صاف آفتابی باشد.»

آنها پس از شنیدن این گزارش، تصمیم می‌گیرند سه روز آینده را برای مسافرت انتخاب کنند.

بنابراین هرچه اطلاعات دقیق‌تر و کامل‌تر باشد و از روش‌های مناسب‌تری برای پیش‌بینی استفاده شود، تصمیم‌گیری‌های بهتری در خانواده گرفته می‌شود.

تعریف آمار و علم آمار:

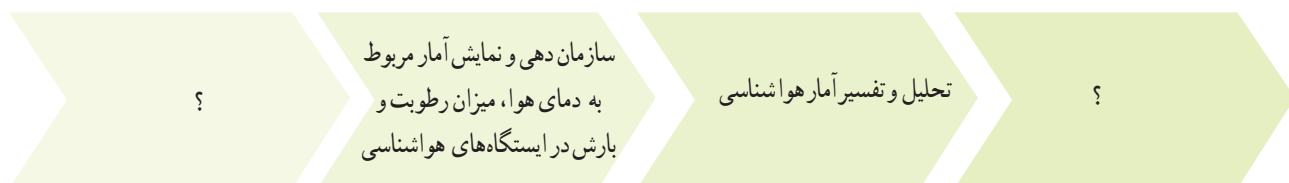
آمار، مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است. **علم آمار** مجموعه روش‌هایی است که شامل جمع‌آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی مناسب در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی می‌شود.

۱ در پیرامون خود، مثال‌هایی را از تصمیم‌گیری یا پیش‌بینی براساس اعداد و ارقام بیاورید.

۲ مراحل علم آمار را در شکل زیر کامل کنید.



۳ با در نظر گرفتن اخبار هواشناسی مراحل علم آمار را در شکل زیر کامل کنید.



۴ تفاوت آمار و علم آمار در چیست؟

۵ مدیر کارخانه‌ای برای پیدا کردن تعداد کل لامپ‌های معیوب در یک ماه آینده، می‌خواهد یک تحقیق آماری انجام دهد. برای این منظور تعداد لامپ‌های معیوب را در چند روز کاری به صورت زیر جمع‌آوری کرده است.

روزهای کاری	روز کاری اول	روز کاری دوم	روز کاری سوم	روز کاری چهارم	روز کاری پنجم
تعداد لامپ‌های معیوب	۵۰	۷۰	۹۰	۱۲۰	۱۸۰



کارخانه لامپ‌سازی

براساس داده‌های به دست آمده، به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) روند تغییر اعداد و ارقام در این تمرین نشان‌دهنده چه چیزی است؟

ب) در این تمرین چه چیزی به عنوان آمار محسوب می‌شود؟

پ) بهترین تصمیمی که مدیر کارخانه براساس «علم آمار» می‌تواند بگیرد، چیست؟

☐ ادامه خط تولید لامپ‌ها

☐ توقف یا اصلاح خط تولید لامپ‌ها



۶ کدام جمله درست و کدام جمله نادرست است :

الف) اولین قدم در استفاده از «علم آمار»، جمع آوری داده‌هاست.....

ب) پیش‌بینی و تصمیم‌گیری برای آینده، نتیجه استفاده از «علم آمار» است.....

پ) «علم آمار»، همان اعداد و ارقام است.....

۷ به شکل روبه‌رو توجه کنید : آیا این شکل را می‌توان به اعداد و ارقام تبدیل کرد؟ اعداد

و ارقام آن چگونه‌اند؟ برای پاسخ به این سؤالات، کاربرد علم آمار در مهندسی کامپیوتر را مطالعه کنید.

برای مطالعه

کاربرد علم آمار در مهندسی کامپیوتر (پردازش تصویر)



کاربرد علم آمار در مهندسی کامپیوتر



هر تصویر از تعداد زیادی مربع‌های کوچک تشکیل شده است. هر یک از این مربع‌های کوچک «پیکسل» نام دارند و به هر پیکسل می‌توان یک عدد را نسبت داد که بیانگر مقدار روشنایی آن است.

در واقع هر تصویر از یک **جدول عددی** تشکیل می‌شود که هر یک از اعداد، مقدار روشنایی هر پیکسل را نشان می‌دهند. جدول مربوط به هر تصویر را به راحتی می‌توان به دست آورد. در اینجا نکته حایز اهمیت، کاربرد «پردازش تصویر» است.

«پردازش تصویر» یکی از موضوعات بسیار مهم در مهندسی کامپیوتر محسوب می‌شود. رشد استفاده از پردازش تصویر در سیستم‌های «کنترل هوشمند سرعت»، «خواندن اتوماتیک پلاک خودرو در طرح‌های زوج و فرد»، «طرح ترافیک» و «ثبت تخلفات خودرو» در سال‌های اخیر مشهود بوده است.

با استفاده از معیارهایی که در علم آمار وجود دارد، می‌توان به بررسی کیفیت تصاویر پرداخت و تصاویر مخدوش و نامناسب را با تصاویر حقیقی‌شان مقایسه کرد.

۸ جدول سمت راست، جدول عددی شکل سمت چپ نامیده می‌شود. اگر رنگ سبز را با عدد ۳، رنگ زرد را با عدد ۲، رنگ قرمز

را با عدد ۱ و رنگ مشکی را با عدد صفر، نشان دهیم. جدول عددی و شکل زیر را کامل کنید.

؟		
		؟
	؟	؟

شکل

۱	؟	؟
؟	؟	۰
؟	۰	۳

جدول عددی

الف چاقی امروزه، به عنوان یکی از مسائل مهم و اساسی در زمینه سلامت افراد محسوب می‌شود. برای اطلاع بیشتر، کاربرد علم آمار در علوم پزشکی را مطالعه کنید.

برای مطالعه

کاربرد علم آمار در پزشکی (چاقی)

یکی از کاربردهای علم آمار در علوم پزشکی، بررسی موضوع چاقی است. برای اینکه میزان چاقی یک فرد را بسنجیم، از معیاری تحت عنوان، معیار «شاخص توده بدن» استفاده می‌کنیم. این معیار از تقسیم وزن افراد (W) بر حسب کیلوگرم بر توان دوم قد افراد (H) بر حسب متر یا به عبارت دیگر $\frac{W_{kg}}{(H_m)^2}$ محاسبه می‌شود و براساس آن نتایج زیر به دست می‌آید:



کاربرد علم آمار و احتمال در پزشکی

شاخص توده بدن	طبقه بندی
کمتر از ۱۸/۵	کم وزن
۱۸/۵ تا ۲۴/۹	وزن طبیعی
۲۵ تا ۲۹/۹	اضافه وزن
۳۰ تا ۳۴/۹	چاقی درجه یک
۳۵ تا ۳۹/۹	چاقی درجه دو
بیشتر از ۴۰	چاقی درجه سه

براساس علم آمار با استفاده از مدل‌های آماری مناسب، عوامل مؤثر بر شاخص توده بدن شناسایی می‌شود. به عنوان مثال، عواملی همچون «رژیم غذایی ناسالم» و «کم تحرکی» می‌توانند در بالا رفتن این معیار و ایجاد بیماری چاقی مؤثر باشند. بنابراین، امروزه با توجه به تغییر شیوه‌های زندگی، از جمله ماشینی شدن و استفاده از خوراکی‌های آماده، نیاز به استفاده از رژیم غذایی سالم، عدم مصرف خوراکی‌های مضر و همچنین ورزش و فعالیت بدنی، بسیار ضروری است. به همین منظور، ورزش صبحگاهی و ایجاد بوفه سالم در مدارس، گامی کوچک؛ اما مؤثر در جهت سلامت افراد است.

مثال ۱

فرض کنید وزن شخصی ۱۰۰ کیلوگرم و قدش ۱ متر و ۷۴ سانتی متر باشد. شاخص توده بدن شخص به صورت زیر است:

$$\text{شاخص توده بدن} = \frac{100}{(1/74)^2} = 33/02$$

۱ با مراجعه به جدول موجود در کاربرد علم آمار و احتمال در پزشکی، درباره چاق بودن این شخص به چه نتیجه ای می رسید؟

۲ درباره چاق بودن خودتان و اعضای خانواده خود اظهار نظر کنید.

ب شکل «الف»، افراد یک شهر را نشان می دهد که شامل افراد عادی و افراد چاق می باشند.



شکل الف — افراد یک شهر

با هدف به دست آوردن آمار افراد چاق و درصد این افراد، فرض کنیم بخواهیم تعداد کل افراد چاق را که در این شهر زندگی می کنند، بشماریم یا به عبارت دیگر سرشماری کنیم.

به نظر شما، این کار به سادگی انجام می شود؟

همان گونه که احتمالاً حدس زده اید، جمع آوری آمار تمام شهر، کار آسانی نیست. همان گونه که در شکل «ب» دیده می شود، به جای شمارش کل افراد این شهر، می توان تعدادی از افراد شهر را انتخاب کرد و براساس آن، پیش بینی کرد که چند درصد از افراد این شهر چاق اند.

به کمک افراد انتخابی از شهر در شکل «ب» پیش بینی کنید که چند درصد افراد این شهر چاق اند.



شکل ب — افراد انتخابی از شهر

همان طور که می بینید این بار پاسخ به سؤالات، با دقت بیشتر و آسان تر داده می شود و به راحتی درصد افراد چاق در زیر مجموعه انتخابی قابل محاسبه است.



تعریف جامعه یا جمعیت

مجموعه تمام افراد یا اشیایی که دربارهٔ یک یا چند ویژگی آنها تحقیق صورت گیرد، **جامعه** یا **جمعیت** نامیده می‌شود و هریک از این افراد یا اشیاء را **عضو جامعه** می‌نامند.

تعریف اندازه یا حجم جامعه

تعداد اعضای جامعه را **اندازهٔ جامعه** یا **حجم جامعه** گویند. به عنوان مثال، دانش‌آموزان یک مدرسه می‌توانند یک جامعه باشند و هریک از دانش‌آموزان مدرسه عضو این جامعه هستند.

تعریف نمونه

بخشی از جامعه را که برای مطالعه انتخاب شود، **نمونه** گویند و هریک از افراد یا اشیای انتخاب شده را **عضو نمونه** گویند.



تعریف اندازه یا حجم نمونه

تعداد اعضای نمونه را **اندازهٔ نمونه** یا **حجم نمونه** گویند. به عنوان مثال دانش‌آموزان یک کلاس به عنوان یک نمونه از دانش‌آموزان مدرسه هستند و هریک از دانش‌آموزان کلاس، عضو نمونه محسوب می‌شوند.

کاردر کلاس

در نمودار روبه‌رو تعداد کل قطعات تولیدی دو کارخانه «الف» و «ب» مشخص شده است. برای شناسایی تعداد قطعات معیوب، نمونه‌هایی از تعداد کل قطعات تولیدی انتخاب شده که در نمودار روبه‌رو ارائه شده است. با توجه به اعداد و ارقام موجود در نمودار، جدول صفحهٔ بعد را کامل کنید.

نمودار مربوط به تعداد قطعات تولیدی

تعداد کل قطعات تولیدی ■ تعداد نمونه‌های انتخابی ■



اندازه نمونه	نمونه	اندازه جامعه	عضو جامعه	جامعه
۱۰۰۰			قطعات تولیدی	کارخانه الف
	قطعات تولیدی انتخابی			کارخانه ب

تمرین



۱ می‌خواهیم درباره کیفیت محصولات تولیدی یک کارخانه، تحقیقی انجام دهیم. برای این منظور، از تعداد کل قطعات تولید شده در کارخانه که برابر با ۱۰۰۰۰ قطعه است، ۱۰۰ قطعه انتخاب می‌شود. با توجه به اطلاعات موجود، جدول زیر را کامل کنید :

ویژگی مورد بررسی	اندازه نمونه	اندازه جامعه	جامعه

۲ کدام جمله درست و کدام جمله نادرست است :

الف) اندازه جامعه کمتر از اندازه نمونه است.....

ب) اعضای نمونه، همان اعضای جامعه‌اند.....

پ) نمونه زیر مجموعه‌ای از جامعه است.....

۳ در شکل زیر، دانش‌آموزان یک مدرسه در صف صبحگاهی مشاهده می‌شوند.

هر صف افقی نشان‌دهنده تعداد دانش‌آموزان یک کلاس است. جامعه و اعضای آن را مشخص کنید و دو نمونه دلخواه از این جامعه را ارائه کنید.



درس سوم: متغیر و انواع آن

فعالیت



مزرعه هلو

شکل روبه‌رو محصولات هلوی یک مزرعه کشاورزی را نشان می‌دهد. میوه‌های هلوی این مزرعه را به عنوان اعضای جامعه در نظر بگیرید. یکی از میوه‌ها را انتخاب کنید. برای بررسی مرغوبیت این میوه، می‌توان به چند ویژگی از آن مانند وزن و کیفیت توجه کرد. به کمک یک ترازوی دیجیتالی، وزن آن به راحتی قابل اندازه‌گیری است.

الف) برای اندازه‌گیری کیفیت میوه هلو چه باید کرد؟ آیا به کمک ابزار اندازه‌گیری می‌توان به این سؤال پاسخ داد؟

ب) آیا ترازو، پاسخ این سؤال را هم می‌دهد؟

پ) کشاورز چگونه می‌تواند کیفیت میوه هلوی تولیدی خود را بالا ببرد؟

برای پاسخ به سؤالات «الف» و «ب» باید گفت که هیچ ترازو و یا وسیله‌ای که بتواند میزان کیفیت میوه هلو را اندازه‌گیری کند، وجود ندارد. با این حال کشاورزان با توجه به کیفیت آن، این میوه را به صورت «درجه یک»، «درجه دو» و «درجه سه» به بازار عرضه می‌کنند. به عبارت بهتر، عدد یک را به میوه‌های هلوی بسیار مرغوب و درشت، عدد دو را به میوه‌های هلوی متوسط و عدد سه را به میوه‌های هلوی ریز نسبت می‌دهند. برای پاسخ به سؤال «پ»، کاربرد علم آمار در مهندسی کشاورزی را مطالعه کنید.

برای مطالعه

کاربرد علم آمار در مهندسی کشاورزی (طراحی و نحوه تولید محصولات)



علم آمار در مهندسی کشاورزی کاربرد بسیار زیادی دارد. یک مهندس کشاورزی همواره علاقه‌مند است تا کمیت و کیفیت تولید محصولاتش به بیشترین حد ممکن برسد. برای این منظور، مهندس کشاورزی از انواع کودها مانند نیترات آمونیوم، فسفر و ... استفاده می‌کند. اما سؤالی که در اینجا مطرح می‌شود، آن است که چه میزان کود باید استفاده شود تا کمیت و کیفیت تولید محصولات آن به بیشترین مقدار برسد؟ اینجاست که علم آمار با طراحی آزمایش‌هایی، به این سؤال پاسخ می‌دهد.

بدین منظور، قطعات مختلفی از زمین به طوری که از نظر رطوبت، حاصلخیزی خاک، نور و ... کاملاً یکسان باشند، در نظر گرفته می‌شود. سپس به مطالعه درصدهای مختلف کودهای مورد نظر در این قطعات زمین پرداخته می‌شود. به عبارت دیگر علم آمار در تعیین عوامل مؤثر مانند کودهای مورد استفاده در زمین کشاورزی و سطوحی از عوامل مانند درصدهایی از میزان استفاده کودها برای رسیدن به تولیدات بیشتر کشاورزی به مهندسان کشاورزی کمک می‌کند.

تعریف متغیر و مقدار متغیر

متغیر، ویژگی از اعضای یک جامعه است که بررسی و مطالعه می‌شود و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کند. عددی را که به ویژگی یک عضو نسبت داده می‌شود، مقدار متغیر می‌گویند.



شکل الف

به عنوان مثال در شکل «الف» وزن و کیفیت میوه هلو به عنوان دو متغیر مربوط به میوه هلوست و مقادیر آن در جدول زیر آمده است:

مقدار متغیر	متغیر مربوط به میوه هلو
۲۰۰ گرم	وزن هلو
درجه یک (۱)، درجه دو (۲)، درجه سه (۳)	کیفیت هلو

کاردرکلاس

۱ شکل «ب» یک خودرو را نشان می‌دهد، برخی از ویژگی‌های این خودرو مانند سرعت، میزان بنزین مصرفی و رنگ خودرو در شکل مشخص شده است.



شکل ب

«سرعت خودرو» و «میزان بنزین مصرفی»، قابل اندازه‌گیری است. به عنوان مثال حداکثر سرعت این خودرو در جاده‌ها ۱۲۰ کیلومتر بر ساعت است. به عبارت دیگر مقدار متغیر «سرعت خودرو» برابر با ۱۲۰ کیلومتر بر ساعت است.

همچنین اگر خودرویی به عنوان مثال برای هر ۱۰۰ کیلومتر، ۸ لیتر بنزین مصرف کند؛ بنابراین مقدار متغیر «میزان مصرف خودرو» برابر با ۸ لیتر برای هر ۱۰۰ کیلومتر است.

ولی در این مثال رنگ خودرو قابل اندازه‌گیری نیست. می‌توان انواع رنگ‌های مشکی، سفید و ... را به عنوان مقادیر متغیر «رنگ خودرو» در نظر گرفت و آنها را با اعداد دلخواهی مانند عدد یک برای رنگ مشکی و عدد دو برای رنگ سفید نشان داد.

به نظر شما چه متغیرهای دیگری در این خودرو می‌توان معرفی نمود؟
در سطرهای خالی مقدار هریک از متغیرهای معرفی شده جدید را بیان کنید.

مقدار متغیر	متغیرهای یک خودرو
۱۲۰	حداکثر سرعت مجاز خودرو در جاده
۸	میزان بنزین مصرفی برای هر ۱۰۰ کیلومتر
سفید	رنگ خودرو



۲ جدول زیر متغیرهایی را که دربارهٔ یک دانش‌آموز مطالعه شده است، نشان می‌دهد. مقدار این متغیرها را دربارهٔ خودتان در جدول زیر بنویسید.

مقدار متغیر	متغیرهای یک دانش‌آموز
	سن دانش‌آموز
	نمره ریاضی نهم دانش‌آموز
	گروه خونی (A, B, O, AB)
	قد دانش‌آموز
	وزن دانش‌آموز

مقدار متغیر	متغیر
۱/۲ متر	طول بدن

۳ با توجه به مطالب مربوط به کاربرد علم آمار در محیط زیست، متغیرها و مقدار متغیرهای مربوط به یوزپلنگ ایرانی را در جدول روبه‌رو بنویسید.

۴ در یک کارخانه، کارگران مشغول کارند. مهندس این کارخانه، این کارگران را بر اساس مهارت به صورت بسیار ماهر، ماهر، متوسط و ضعیف درجه بندی کرده است. متغیر و مقدار متغیر را برای کارگران بنویسید.

برای مطالعه

کاربرد علم آمار و احتمال در محیط زیست

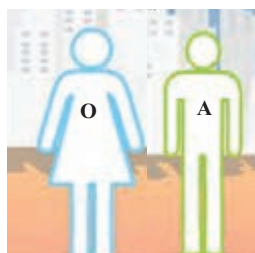


علم آمار و احتمال در محیط زیست کاربرد دارد. به عنوان مثال با استفاده از این علم می‌توان به شناسایی و شناخت عوامل مؤثر بر زیستگاه‌های مطلوب حیوانات در حال انقراض اشاره کرد. این موضوع مدیران محیط زیست را در مدیریت و حفاظت از این زیستگاه‌ها یاری می‌کند. یکی از این حیوانات در حال انقراض «یوزپلنگ ایرانی» است. یوزپلنگ ایرانی یک زیرگونه به شدت در معرض خطر انقراض از یوزپلنگ است که اکنون تنها چند ده قلاذه از آن در ایران یافت می‌شود. این جانور در مناطق بیابانی در سطح منطقه زندگی می‌کرد و سال‌هاست که نسل آن در معرض نابودی کلی قرار دارد. یوزپلنگ از خانوادهٔ گربه سانان به شمار می‌آید؛ اما به دلیل داشتن دست و پایی بلند، بدنی کشیده و باریک، و سینه‌های فراخ تا حدود زیادی به سگ‌های تازی شبیه است. در میان گربه‌سانان، یوز با داشتن ارتفاع شانهای برابر با ۳۸ تا ۶۷ سانتی‌متر و وزنی بین ۲۷ تا ۴۰ کیلوگرم از جمله گربه‌سانان کوچک جثه به شمار می‌رود. اندازهٔ طول بدن آن به ۱/۲ متر می‌رسد و طول دم آن نیز میان ۴۸ تا ۶۶ سانتی‌متر است. همچنین سر این جانوران به نسبت کوچک است.

در یک شهر، با افراد مختلفی رو به رو می‌شویم و از آنها سؤالاتی می‌کنیم. آنها به صورت زیر، به سؤالات ما پاسخ داده‌اند. به عنوان مثال:

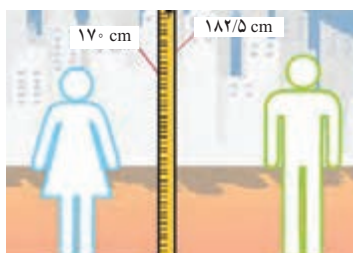
و سؤال آخر:

«گروه خونی خود را بگویید؟»



از همان خانم و آقای پرسیم:

«قد شما چند سانتی متر است؟»



از مادر یک خانواده می‌پرسیم:

«چند فرزند دارید؟»



از یک آقای خانم می‌پرسیم:

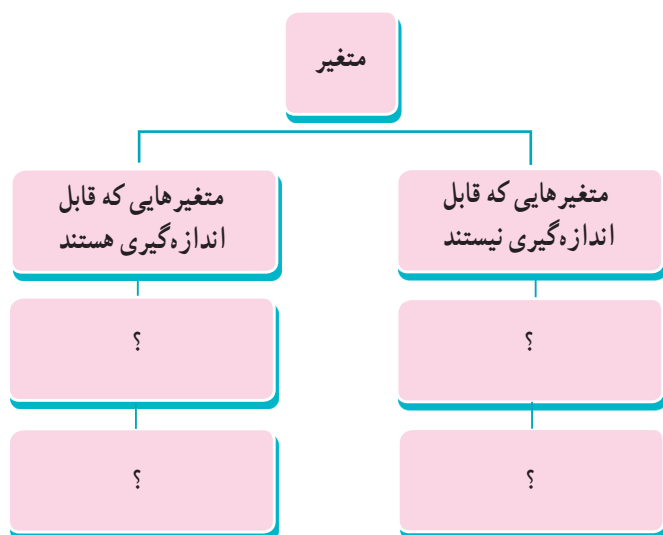
«چقدر از آشپزی کردن لذت می‌برید؟»



حال به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف با توجه به شکل‌های مورد نظر، پاسخ‌های افراد را در جدول زیر قرار دهید و آن را کامل کنید.

نام متغیر		
تعداد فرزندان	۲	—
قد افراد		
گروه خونی		
میزان لذت بردن از آشپزی		



ب با توجه به متغیرهای بیان شده، کدام متغیرها قابل اندازه‌گیری‌اند و کدام نیستند؟ به جای علامت سؤال، نام متغیر مورد نظر را بنویسید.

تعریف متغیرهای کمی

متغیرهایی را که قابل اندازه‌گیری اند، «متغیرهای کمی» گویند. به عنوان مثال تعداد فرزندان خانواده و وزن افراد متغیرهای کمی اند.

تعریف متغیرهای کیفی

متغیرهایی را که قابل اندازه‌گیری نیستند، «متغیرهای کیفی» گویند. به عنوان مثال گروه خونی افراد و پاسخ سؤال «میزان لذت بردن از آشپزی» متغیرهای کیفی اند.

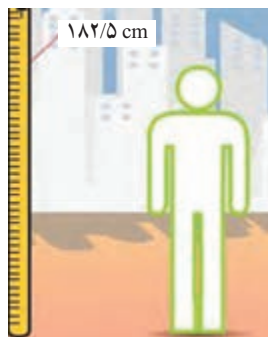
کاردرکلاس



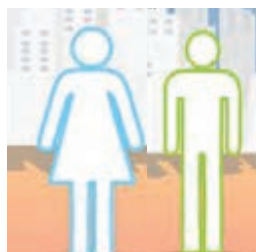
شکل الف



شکل ب



شکل پ



شکل ت

۱ با توجه به شکل‌ها، جملات را کامل کنید :

در شکل «الف»، تعداد مسافران یک قطار، یک متغیر **کمی** است.

در شکل «ب»، اقوام ایرانی یک متغیر است.

در شکل «پ»، قد فرد، یک متغیر است.

در شکل «ت»، جنسیت افراد یک متغیر است.

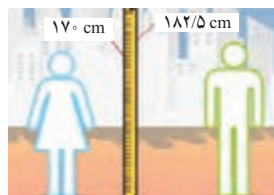
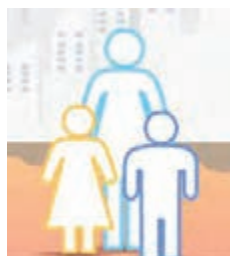
۲ نوع متغیرهای زیر را مشخص کنید :

- | | | |
|-------------------------------|------------------------------|--|
| ☐ کیفی | ☐ کمی | الف) انواع هواپیما (مسافربری، باربری، جنگنده) |
| ☐ کیفی | ☐ کمی | ب) مدت زمانی که طول می‌کشد از خانه به مدرسه برسید. |
| ☐ کیفی | ☐ کمی | پ) رنگ چشم (میشی، آبی، قهوه‌ای) |

۳ جدول زیر را کامل کنید.

سؤال (متغیر)	نوع متغیر
موی شما چه رنگی است؟	
وزن شما چه عددی است؟	
چقدر از تماشای بازی فوتبال لذت می‌برید؟	

فعالیت



همان گونه که در فعالیت قبل مطرح شد، پاسخ دو سؤال زیر، متغیرهایی از نوع کمی اند.

۱ از مادر یک خانواده می پرسیم: چند فرزند دارید؟

برخی از جواب های ممکن: ۰، ۱، ۲، ۳، ...

۲ قد شما چند سانتی متر است؟

برخی از جواب های ممکن: ۱۵۰ سانتی متر تا ۱۷۰ سانتی متر، ۱۵۹ سانتی متر، ۱۶۰/۵ سانتی متر و ...

۳ فرض کنید کمترین و بیشترین وزن در جامعه دانش آموزان پایه دهم کشور به ترتیب ۴۶ کیلوگرم و ۷۵ کیلوگرم باشد. در این صورت

وزن تمام دانش آموزان کشور در بازه [۴۶, ۷۵] قرار می گیرد.

آیا هر عددی از این بازه می تواند وزن یک دانش آموز باشد؟

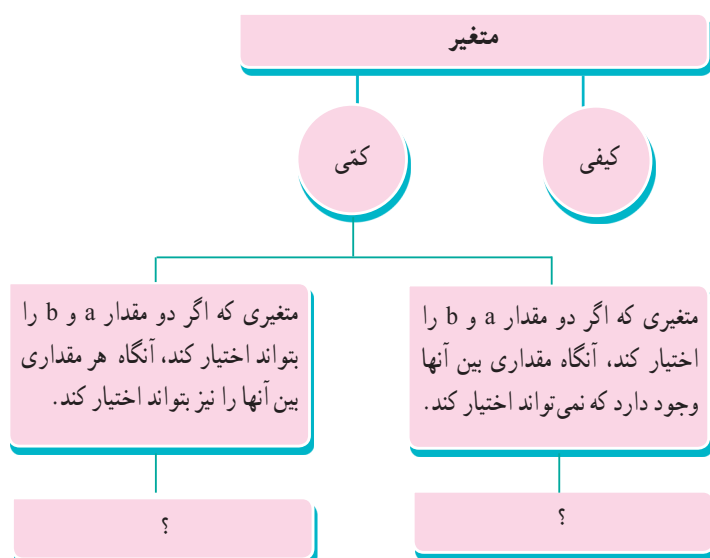
۴ فرض کنید کمترین و بیشترین تعداد فرزندان یک خانواده در کشور به ترتیب ۰ و ۲۰ باشد. در این صورت تعداد فرزندان هر خانواده

در این کشور عددی صحیح از بازه [۰, ۲۰] خواهد بود. آیا هر عددی از این بازه می تواند نشان دهنده تعداد فرزندان یک خانواده باشد؟

۵ متغیرهای مطرح شده در قسمت های ۳ و ۴ کمی اند و یا کیفی؟

۶ چه تفاوتی در متغیرهای مطرح شده در قسمت های ۳ و ۴ وجود دارد که جواب های مربوط به آنها متفاوت است؟

۷ با توجه به قسمت های ۳ و ۴ در شکل زیر به جای علامت سؤال، پاسخ مناسب قرار دهید.





تعریف متغیر پیوسته

متغیری است که اگر دو مقدار a و b را بتواند اختیار کند، هر مقدار بین آنها را نیز بتواند اختیار کند. به عنوان مثال وزن یک دانش آموز می تواند ۴۶ کیلوگرم، ۴۷ کیلوگرم یا هر عددی بین این دو رقم باشد.

تعریف متغیر گسسته

متغیر گسسته، متغیری است که پیوسته نباشد. به عنوان مثال تعداد فرزندان یک خانواده متغیر گسسته است.

کار در کلاس



۱) با پر کردن جاهای خالی، پیوسته یا گسسته بودن متغیرهای کتی زیر را مشخص کنید.

الف) سرعت خودرو یک متغیر پیوسته است. مقدار آن متغیر ۱۲۰ کیلومتر بر ساعت است.

ب) میزان مصرف بنزین این خودرو، یک متغیر و مقدار آن برای هر ۱۰۰ کیلومتر است.

پ) تعداد سرنشینان مجاز در این خودرو، یک متغیر است و این تعداد برابر با است.

۲) انواع متغیرهای زیر را مشخص کنید :

☐ پیوسته	☐ گسسته	الف) تعداد ماهی های یک دریا
☐ پیوسته	☐ گسسته	ب) مدت زمانی که طول می کشد از خانه به مدرسه برسید.
☐ پیوسته	☐ گسسته	پ) وزن افراد
☐ پیوسته	☐ گسسته	ت) تعداد دانش آموزان یک مدرسه

۳ در هر مورد نوع متغیر مطرح شده در سؤال را مشخص کنید.

سؤال (متغیر)	نوع متغیر
قد شما چه عددی است؟	
وزن شما چه عددی است؟	
تعداد دوستان شما چند نفر است؟	
وزن دوستان چه عددی است؟	
شاخص توده بدن خانواده شما چه عددی است؟	
ارتفاع شانه یوزپلنگ ایرانی چقدر است؟	

انواع متغیرهای کیفی

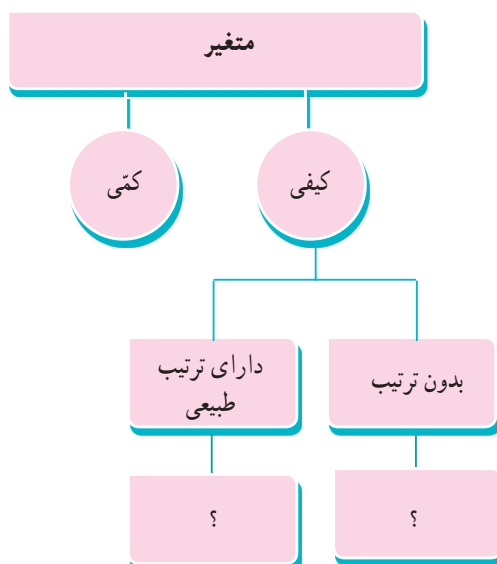
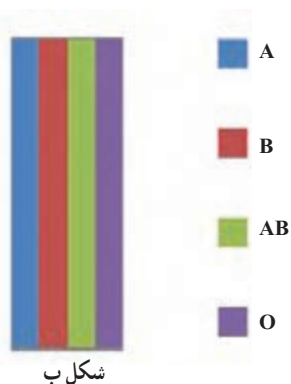
فعالیت

به سؤال‌های زیر توجه کنید :

سؤال : از یک آقا و خانم می‌پرسیم : چقدر از آشپزی کردن لذت می‌بری؟
برخی از جواب‌های ممکن : خیلی زیاد، زیاد ، متوسط ، کم ، خیلی کم
سؤال : گروه خونی خود را بگویید.

برخی از جواب‌های ممکن : گروه خونی A ، B ، AB ، O

در پاسخ به سؤال اول، یک ترتیب طبیعی وجود دارد؛ همانند شکل «الف» در صورتی که در پاسخ به سؤال دوم نمی‌توان ترتیب طبیعی قائل شد، شکل «ب» را ملاحظه کنید.
در شکل زیر به جای علامت سؤال، پاسخ مناسب را قرار دهید.



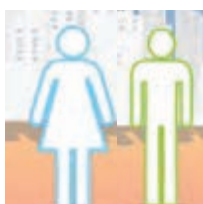
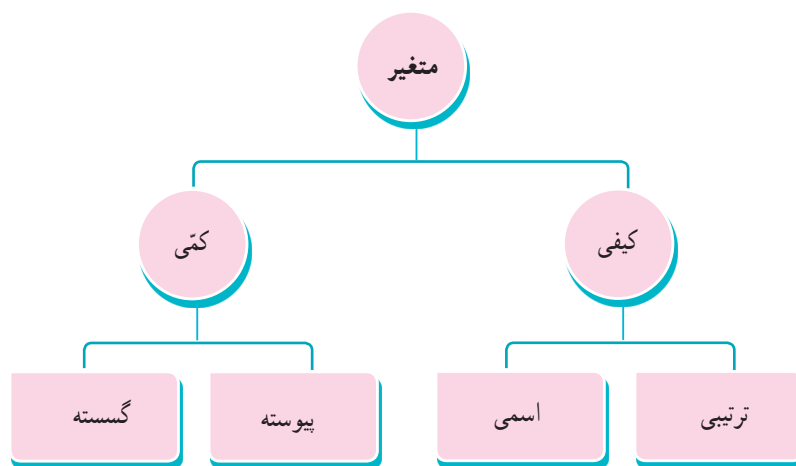
متغیرهای کیفی قابل اندازه‌گیری نیستند. این متغیرها به دو دسته زیر تقسیم می‌شود:

(۱) متغیر ترتیبی (۲) متغیر اسمی (غیر ترتیبی)

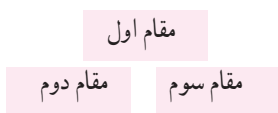
متغیر ترتیبی: متغیری است که در آن نوعی ترتیب طبیعی وجود داشته باشد. به عنوان مثال سطح تحصیلات (دیپلم، فوق دیپلم، کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکتری)

متغیر اسمی (غیر ترتیبی): متغیری کیفی است که ترتیبی نیست؛ مانند جنسیت (زن و مرد)

انواع متغیرها در یک نگاه:



شکل الف



شکل ب



شکل پ

بسیار زیاد،
زیاد،
متوسط،
کم،
بسیار کم

کار در کلاس

با توجه به شکل‌های زیر جملات زیر را کامل کنید:

در شکل «الف»، جنسیت افراد، یک متغیر **اسمی** است و مقادیر آن زن و مرد است.

در شکل «ب»، مقام‌هایی که یک ورزشکار در مسابقه به دست می‌آورد، یک متغیر است و مقادیر آن است.

در شکل «پ»، میزان علاقه شما به خورش قیمه سؤال شده است که یک متغیر است و مقادیر آن است.

۱ با پر کردن جاهای خالی، اسمی یا ترتیبی بودن متغیرهای زیر را مشخص کنید.

- | | |
|---------------------------------|-------------------------------|
| ☐ ترتیبی | ☐ اسمی |
| ☐ ترتیبی | ☐ اسمی |
| ☐ ترتیبی | ☐ اسمی |
| ☐ ترتیبی | ☐ اسمی |

الف) مراحل رشد یک انسان (نوزاد، کودک، نونهال، نوجوان، جوان، میان سال، کهن سال)

ب) نژاد افراد (سفید پوست، زرد پوست، سیاه پوست)

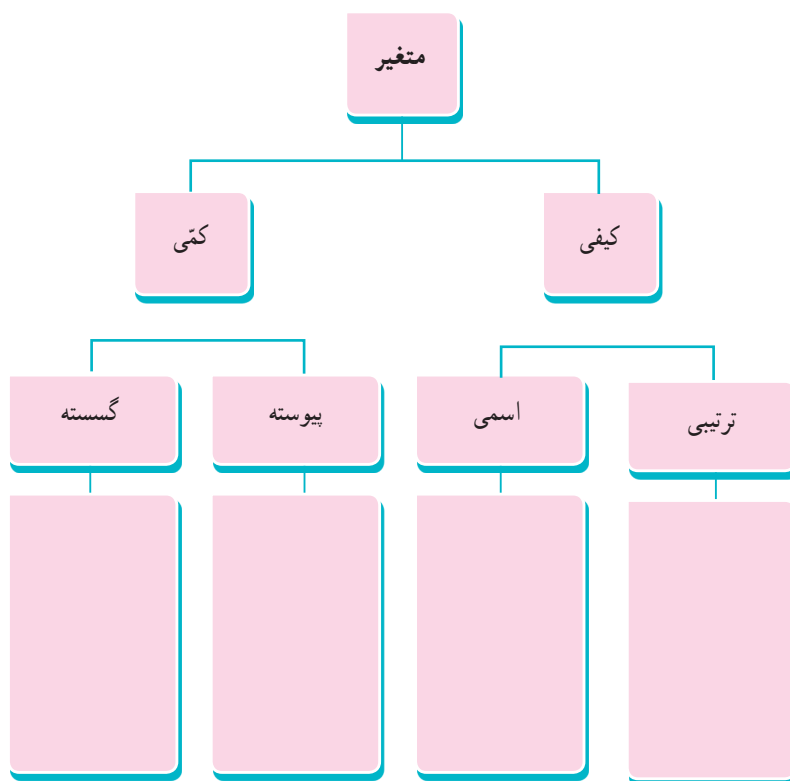
پ) رنگ موی افراد (مشکی، قهوه‌ای، طلایی)

ت) کیفیت میوه هلو (درجه ۱، درجه ۲، درجه ۳)

۲ نوع متغیرها را در نمودار زیر، دسته‌بندی کنید.



متغیر	نوع متغیر
۱- میزان بارندگی برحسب ساعته متر در یک شهر	
۲- نوع بارندگی (باران، برف)	
۳- تعداد شهرهایی که در یک روز هوای آفتابی دارند	
۴- میزان دمای هوا	
۵- شدت آلودگی هوا (زیاد، متوسط، کم)	
۶- انواع وضعیت هوا (آفتابی، ابری، بارانی، برفی)	
۷- شدت بارندگی (زیاد، متوسط، کم)	



۳ جدول زیر متغیرهای دانش‌آموزان را نشان می‌دهد. انواع متغیرها از نظر کمی، کیفی، گسسته، پیوسته، ترتیبی و اسمی را در جدول زیر کامل کنید.

متغیرهای دانش‌آموزان	متغیر کمی	متغیر کیفی	متغیر گسسته	متغیر پیوسته	متغیر ترتیبی	متغیر اسمی
سن	×			×		
نمرهٔ ریاضی نهم						
جنسیت (دختر و پسر)						
قد						
وزن						
میزان هوش (هوش بالا، متوسط، پایین)		×			×	
میزان رضایت در مدرسه (بسیار، متوسط، ضعیف)						
شاخص تودهٔ بدن						

۴ فرض کنید وزن شخصی ۹۵ کیلوگرم و قد او ۱۶۰ سانتی‌متر باشد.

الف) شاخص تودهٔ بدن این شخص را حساب کنید.

ب) شاخص تودهٔ بدن شخص چه نوع متغیری از نظر کمی، کیفی، گسسته، پیوسته، اسمی و ترتیبی است؟

۵ جدول سمت راست، جدول عددی شکل سمت چپ است. اگر رنگ سبز را با عدد ۳، رنگ سفید را با عدد ۲ و رنگ قرمز را با

عدد ۱ نشان دهیم، جدول عددی و شکل زیر را کامل کنید. این شکل چه چیزی است؟

؟	؟	؟
؟		؟
	؟	؟

شکل

؟	۳	۳
۲	؟	۲
؟	۱	۱

جدول عددی

۶ جامعه و نمونه را تعریف کنید و برای هر یک مثال بزنید.

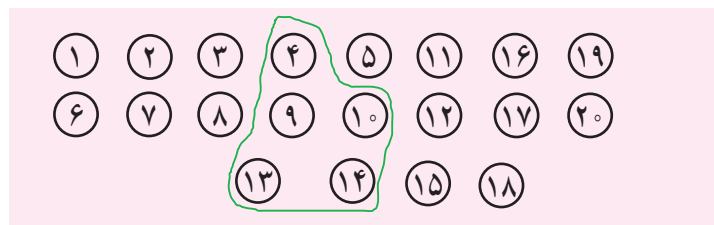
۷ شکل زیر یک جامعهٔ فرضی را نشان می‌دهد که اعضای آن را با شماره‌های ۱ تا ۲۰ مشخص کرده‌ایم. همچنین اعضای نمونه با خط

سبز رنگ انتخاب شده‌اند. به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) اندازهٔ جامعه چه عددی است؟

ب) اندازهٔ نمونهٔ انتخابی چه عددی است؟

پ) اعضای نمونهٔ انتخابی را بنویسید.



۸ جدول زیر را کامل کنید.

متغیر	نوع متغیر
وزن یک هلو	
کیفیت یک هلو	
اندازه طول بدن یوزپلنگ ایرانی	
اقوام ایرانی	
وضعیت آب و هوا	
دمای هوا در قله	
فشار هوا در قله کوه	

